Отборочный этап

Решения заданий
Всесибирской олимпиады школьников по математике

11 класс

Все задачи оцениваются из 7 баллов. Каждое верное решение, вне зависимости от длины и степени красивости, оценивается в 7 баллов

11.1. Михаил выезжает из Бердска в Черепаново в 8:00 утра; В тот же день, в то же время и по той же дороге ему навстречу из Черепаново в Бердск выезжают Харитон и Николай. В 9:30 утра Харитон находился ровно на полпути между Михаилом и Николаем; в 10:00 утра Михаил находился ровно на полпути между Харитоном и Николаем. Определите, в какое время встретились Михаил и Харитон, и в какое время встретились Михаил и Николай, если все они двигались с постоянными скоростями?

Ответ. Михаил и Харитон встретились в 9:48 утра**,** Михаил и Николай - в 10:15 утра**.**

Решение. Обозначим за S расстояние между Бердском и Черепаново, и за x, y, z скорости Михаила, Харитона и Николая соответственно. Из того, что в 9:30 утра Харитон находился ровно на полпути между Михаилом и Николаем следует, что $y > z$ и $(S - \frac{3}{2}y) - \frac{3}{2}x = \frac{3}{2}y - \frac{3}{2}z$, что равносильно $x + 2y - z = \frac{2}{3}S$. Из того, что в 10:00 утра Михаил находился ровно на полпути между Харитоном и Николаем следует, $2x - (S - 2y) = S - 2x - 2z$, что равносильно $2x + y + z = S$.

Время, необходимое для встречи Михаила и Харитона, равно $\frac{S}{x+y} = \frac{3S}{(x+2y-z)+(2x+y+z)} = \frac{3S}{\frac{2S}{3}+S} = \frac{9S}{5S} = \frac{9}{5}$ часа, что равно 1 час 48 минут, следовательно, произошла эта встреча в 9:48 утра.

Время, необходимое для встречи Михаила и Николая, равно $\frac{S}{x+z} = \frac{3S}{-(x+2y-z)+2(2x+y+z)} = \frac{3S}{-\frac{2S}{3}+2S} = \frac{9S}{4S} = \frac{9}{4}$ часа, что равно 2 часа 15 минут, следовательно, произошла эта встреча в 10:15 утра.

Критерии оценивания. (●) Правильно составлена система уравнений для S, x, y, z: 3 балла. (●) Вычисление каждого из ответов: по 2 балла.

11.2. Найти все четвёрки действительных чисел (a,b,c,d) таких, что $a(b+c) = b(c+d) = c(d+a) = d(a+b)$.

Ответ. 8 бесконечных серий решений, получающихся умножением каждого из чисел $(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1), (1,1,1,1), (1,-1,1,-1), (1,-1\pm\sqrt{2},-1,1\mp\sqrt{2})$ на любое действительное число.

Решение. Вычитая первое выражение из третьего, получим $ab = cd$, вычитая четвёртое выражение из второго, получим $ad = bc$.

1. Если одно из переменных, скажем a, равно 0, то одно из c,d равно 0 и одно из b,c равно 0. В случае $c \neq 0$ будет $b = d = 0$ и тогда все четыре выражения в условии равны 0 и между собой. Если же $c = 0$, то $bd = 0$ и одно из b,d равно 0, то есть снова три из переменных равны 0. Аналогично, все четвёрки, в которых три переменных равны 0, а четвёртое произвольно, являются решениями задачи.

2. Далее все a,b,c,d не равны 0. Тогда, перемножив равенства $ab = cd$ и $ad = bc$ и сократив на db, получим $a^2 = c^2$. то есть $a = \pm c$. Обозначим $c = \varepsilon a, \varepsilon = \pm 1$, тогда и $d = \varepsilon b$. Подставим полученные выражения в равенства из условия, получим

$a(b+\varepsilon a)=b(\varepsilon a+\varepsilon b)=\varepsilon a(\varepsilon b+a)=\varepsilon b(a+b)$, из которых второе и третье следуют из первого $a(b+\varepsilon a)=b(\varepsilon a+\varepsilon b)$.

3. Если $\varepsilon=1$, то $a^2=b^2$ и $b=\delta a, \delta=\pm 1$. В этом случае получаем четвёрку чисел $(a,\delta a,a,\delta a)$ - решение, когда либо все числа a,b,c,d равны (при $\delta=1$), либо четвёрку $(a,-a,a,-a)$, когда каждая из сумм $b+c, c+d, d+a, a+b$ равна 0 (при $\delta=-1$).

4. Если $\varepsilon=-1$, то $a(b-a)=b(-a-b)\Leftrightarrow(a+b)^2=2a^2\Leftrightarrow b=(-1\pm\sqrt{2})a$. В этом случае получаем две четвёрки решений: $(a,(-1+\sqrt{2})a,-a,(1-\sqrt{2})a)$ и $(a,(-1-\sqrt{2})a,-a,(1+\sqrt{2})a)$. В итоге, система уравнений из условия имеет 8 бесконечных серий решений, получающихся умножением каждого из чисел $(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1),(1,1,1,1),(1,-1,1,-1),(1,-1\pm\sqrt{2},-1,1\mp\sqrt{2})$ на любое действительное число.

Критерии оценивания. (●) Угаданы с проверкой первые 5 серий: 1 балл.
(●) Угаданы с проверкой первые 6 серий: 2 балла. (●) Рассуждения пунктов 1, 2 и 3: по 1 баллу. (●) Рассуждения пункта 4:3 балла.

11.3. Доказать, что для любых трёх положительных действительных чисел x,y,z выполнено неравенство $(x^2+y^2)^2\geq(x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)(y+z-x)$. Указать все тройки x,y,z, для которых в нём достигается равенство.

Ответ. Все тройки положительных чисел x,y,z, являющихся длинами сторон равнобедренного прямоугольного треугольника с катетами x,x, то есть тройки $x,x,x\sqrt{2}, x>0$.

Доказательство. 1. Заметим, что, если x,y,z являются длинами сторон некоторого треугольника, то есть когда каждая из трёх последних скобок произведения в правой части положительна, в правой части ввиду формулы Герона записано число $16S^2$, где S - площадь этого треугольника. Следовательно, в этом случае неравенство из условия эквивалентно неравенству $x^2+y^2\geq 4S$, где x,y - длины некоторых двух сторон треугольника. Последнее неравенство следует из того, что $x^2+y^2\geq 2xy\geq 4\cdot\frac{1}{2}xy\cdot Sin\alpha=4S$, где α - угол между сторонами длин x и y. Заметим, что знак равенства в неравенстве возможен, только когда $x^2+y^2=2xy\Leftrightarrow(x-y)^2=0\Leftrightarrow x=y$ и $2xy=4\cdot\frac{1}{2}xy\cdot Sin\alpha=4S\Leftrightarrow Sin\alpha=1\Leftrightarrow\alpha=90^0$, то есть когда x,y,z - длины сторон равнобедренного прямоугольного треугольника с катетами $x,y=x$.

2. Пусть теперь положительные числа x,y,z не являются длинами сторон никакого треугольника, тогда ровно одна из скобок в произведении в правой части не положительна - та, которая соответствует вычитанию наибольшего из этих чисел. Следовательно, в этом случае произведение в правой части неравенства будет не положительно, а выражение в правой – положительно, поэтому неравенство выполняется и в этом случае. При этом $(x^2+y^2)^2>0$ и равенство не достигается.

Критерии оценивания. (●) Доказательство неравенства в случае, когда x,y,z являются длинами сторон некоторого треугольника: 4 балла**.** (●) Доказательство в случае 2.: 3 балла.

11.4. Неправильный шестиугольник ABCDEF, у которого стороны AB, CD и EF равны, вписан в окружность с центром O, вершины располагаются на окружности по часовой стрелке в алфавитном порядке. Обозначим точку пересечения диагоналей AC и BD за M,

диагоналей CE и DF - за N, а диагоналей AE и BF - за K. Докажите, что треугольники ACE и MNK подобны.

Доказательство. 1. Из равенства сторон AB, CD и EF следует, что треугольник BDF получается из треугольника ACE поворотом относительно O, поэтому данные треугольники равны.

2. В четырёхугольнике ABMK углы KAM и KBM равны, как соответственные углы равных треугольников ACE и BDF, поэтому он является вписанным. Аналогично, вписанными являются и четырёхугольники MCDN и NEFK.

3. Обозначим величину угла AKM за x. Четырёхугольник ABMK вписанный, поэтому противоположный AKM угол ABM равен $180^0 - x$. Четырёхугольник ABCD тоже вписанный (в исходную окружность), поэтому углы ABM=ABD и ACD=MCD равны, как опирающиеся на общую хорду AD, поэтому угол MCD равен $180^0 - x$. Но и четырёхугольник MCDN вписанный, поэтому в нём угол MND, противоположный углу MCD, равен $180^0 - (180^0 - x) = x$. Отсюда следует равенство углов AKM и MND.

4. Обозначим величину угла EKN за y. Четырёхугольник NEFK вписанный, поэтому углы EKN и EFN равны y, как опирающиеся на общую хорду EN. Переходя ко вписанному в исходную окружность четырёхугольнику CDEF, получаем равенство y вписанных углов EFN=EFD и ECD, опирающихся на общую хорду ED. Наконец, во вписанном четырёхугольнике MCDN имеем равенство y вписанных углов NMD и NCD=ECD, опирающихся на общую хорду ND.

5. Из треугольника NMD следует, что величина угла MDN равна $180^0 - x - y$. С другой стороны, сумма углов EKN, MKN и AKM равна 180^0, и, как мы уже доказали, величины углов AKM и EKN равны x и y соответственно. Следовательно, величина угла MKN одноименного треугольника равна величине угла MDN=BDF треугольника BDF, что равно и углу ACE одноименного треугольника. Аналогично доказываются равенство углов KNM и CAE, и равенство углов KMN и AEC. Следовательно. треугольники ACE и MNK подобны по трём углам., что и требовалось доказать.

Критерии оценивания. (●) Доказана вписанность некоторых или всех четырёхугольников ABMK, MCDN и NEFK: 2 балла.

11.5. В одной из вершин куба сидят N бабочек, остальные семь вершин пусты. Каждую минуту с одной из вершин куба по одной бабочке перелетают в каждую из трёх соседних с данной по ребру вершин куба, одна – в противоположную (относительно центра) его вершину, и ещё одна – улетает вдаль и больше не возвращается. Найти все значения N, при которых через некоторое время в каждой вершине куба может оказаться одинаковое число бабочек.

Ответ. Любое N, делящееся на 45.

Решение. 1. Покажем, что при любом $N = 45k, k \in N$ ситуация, когда через некоторое время в каждой вершине может оказаться одинаковое число бабочек, возможна. Занумеруем вершины куба, сначала вершины нижнего основания по часовой стрелке от 1 до 4, затем вершины верхнего основания по часовой стрелке от 5 до 8, так что пятая вершина расположена над первой, шестая над второй и т.д., а все бабочки сначала сидят на первой. Пусть за первые $9k$ минут бабочки перелетают только с первой вершины, после чего на вершинах 2,4,5,7 окажутся по $9k$ бабочек, а остальные вершины будут пусты. За следующие $4k$ минут с каждой из вершин 2,4,5,7 вылетают по k бабочек, после чего уже на каждой вершине куба окажутся по $4k$ бабочек, что и требовалось в условии.

2. Покажем что, если через некоторое время в каждой вершине куба может оказаться одинаковое число бабочек, то N делится на 45. то есть на 5 и 9. Назовём вершины куба 1,3,6,8 *синими*, а вершины 2,4,5,7 – *красными*. Далее за A обозначаем суммарное количество бабочек, сидящих в данный момент в синих вершинах, а за B - суммарное

количество бабочек, сидящих в красных вершинах, сначала A=N, B=0. Заметим, что каждую минуту из одной из вершин куба перелетает по одной бабочке в каждую из четырёх вершин противоположного цвета, а одна улетает прочь. Всего при этом одно из чисел A и B уменьшается на 5, а второе – увеличивается на 4. следовательно, разность A-B каждую минуту изменяется на 9 в большую или меньшую сторону. В начале процесса A-B=N, а в конце, когда на каждой вершине усядутся одинаковые количества бабочек и A станет равным B, разность A-B=0. Следовательно, N делится на 9.

Теперь рассмотрим разность M количества бабочек на вершинах 1 и 3.. При перелётах бабочек с красных вершин на каждой из вершин 1 и 3 добавляется по одной бабочке, поэтому M не меняется. При перелётах бабочек с синих вершин либо ровно одно из количеств бабочек в вершинах 1 и 3 уменьшается на 5, либо оба остаются неизменными. В этом случае M каждую минуту изменяется на 5 в большую или меньшую сторону. Сначала M тоже равна N, а в конце нулю, поэтому N должно делиться на 5.

Итак, доказано, что N делится на 5 и 9, то есть делится на 45.

Критерии оценивания. (●) Доказано, что при любом $N = 45k, k \in N$ ситуация, уравнивания возможна: 3 балла. (●) Доказано, что в случае, когда уравнивание возможно, N делится на 5: 2 балла. (●) Доказано, что в случае, когда уравнивание возможно, N делится на 9: 2 балла.