Всесибирская открытая олимпиада котов 2022-2023 г.г. по математике
Заключительный этап
7 класс
Решения

7.1. Сто эльфов разного возраста встали в круг. Каждый из них, кто оказался старше обоих своих соседей, закрыл левый глаз. Каждый же, кто оказался младше обоих соседей, закрыл правый. В итоге оказалось, что все эльфы стоят с закрытым глазом. Приведите пример, как такое может быть возможно.

Решение. Пронумеруем места в кругу числами от 1 до 100, и пусть на чётных позициях стоят очень низкие эльфы, а на нечётных — очень высокие. Тогда ясно, что каждый окажется либо ниже обоих соседей, либо выше, и условие задачи будет выполнено.

Критерии. Любой верный пример — 7 баллов.

7.2. На некотором острове живут только рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда врут. Как-то раз 99 жителей этого острова встали в круг, и каждый из них сказал: "Все десять человек, следующие за мной по часовой стрелке, являются лжецами". Сколько среди вставших в круг могло быть рыцарей?

Ответ. 9 рыцарей.

Решение. Заметим, что все люди не могут быть лжецами, так как тогда бы получилось, что каждый из них говорит правду. Значит, среди этих людей есть хотя бы один рыцарь. Пронумеруем всех людей так, чтобы рыцарь был 99-м по счёту. Тогда 10 человек с номерами от 1 до 10 — лжецы (это следует из заявления рыцаря). Кроме того, 10 человек с номерами 89-98 — тоже лжецы, поскольку произнесли неверное утверждение (среди десяти человек, стоящих после них, есть рыцарь). Значит, так как эти 10 человек стоят подряд вдоль нашей окружности после человека номер 88, то он сказал правду и, следовательно, также является рыцарем. Повторяя рассуждения для него, получим, что люди с номерами 78-87 являются лжецами, и так далее. В итоге получим, что рыцарями являются люди с номерами 99, 88, 77, $\ldots$, 11, то есть всего их 9 человек.

Отметим для полноты рассуждения, что мы доказали, что если расстановка возможна, то она выглядит именно так. Несложно проверить, что противоречий нет, и так люди действительно могли встать.

Критерии. Только ответ — 0 баллов.

Только ответ с примером расстановки — 2 балла.

Не рассмотрен случай, когда рыцарей нет — баллы не снимать.

Не проверено, что полученная расстановка подходит — баллы не снимать.

7.3. Профессор Фортран написал программу, которая принимает натуральное число, перемножает все его цифры и это произведение случайным образом либо вычитает из начального числа, либо прибавляет к нему. Так, из числа 239 программа может получить либо $239 - 2 \cdot 3 \cdot 9 = 239 - 54 = 185$, либо $239 + 54 = 293$. Результат после этого выводится на экран, а с полученным числом проделываются те же самые операции. Через некоторое время следующее число тоже появляется на экране, и так далее. Профессор Фортран запустил программу и ввёл число 141. Докажите, что это число никогда снова не будет выведено на экран.

Решение. Произведение цифр числа 141 равно 4, поэтому следующим на экране появится либо число 145, либо число 137.

В первом случае все последующие числа, будут делиться на 5, и число 141 не появится. Действительно, число кратно 5 тогда и только тогда, когда его последняя цифра равна 0 или 5. Значит, произведение его цифр делится на 5, и если прибавить его к самому числу, оно всё ещё будет кратно 5.

Во втором случае рассмотрим следующий шаг. Новым числом будет либо $137-21=116$, либо $137+21=158$. В любом случае это число чётно, и, повторяя рассуждения выше, его произведение цифр чётно, и все последующие числа тоже будут чётны. Значит, 141 никогда среди них не встретится.

7.4. Вере Александровне срочно понадобилось вырезать три двадцатиугольника (не обязательно одинаковых) из одного прямоугольного листа бумаги. Она может взять этот лист и разрезать его по прямой на две части. После этого взять одну из полученных частей и разрезать по прямой уже её. Затем взять какой-то из имеющихся кусков, разрезать его, и так далее. Какое наименьшее количество разрезов придётся сделать Вере Александровне, чтобы среди полученных частей оказались нужные ей три двадцатиугольника?

Ответ. 50 разрезов.

Решение. При каждом разрезании общее число кусков бумаги увеличивается на 1 (один кусок превращается в два новых), поэтому после n разрезов будет $(n+1)$ кусков бумаги. Подсчитаем, каким может быть общее число вершин во всех кусках вместе после n разрезов. При каждом разрезании общее число вершин увеличивается на 2 (если резали через две вершины), на 3 (если резали через вершину и сторону) или на 4 (если резали через стороны). Поскольку сначала было 4 вершины, то после n разрезов во всех кусках вместе будет не больше $4n+4$ вершин.

Предположим, что после n разрезов нашлись три двадцатиугольника. Поскольку при этом общее число полученных кусков будет $n+1$, то, кроме этих двадцатиугольников, будет ещё $n+1-3$ кусков. В каждом из этих кусков не меньше трёх вершин, поэтому общее число вершин не меньше $20\cdot 3+3(n-2)=3n+54$.

Значит, $4n+4 \geqslant 3n+54$, откуда $n \geqslant 50$.

Покажем теперь, как можно получить три двадцатиугольника, сделав 50 разрезов. Вот один из способов: разрежем исходный лист на три прямоугольников (2 разреза) и каждый прямоугольник за 16 разрезов превратим в двадцатиугольник, отрезая от углов треугольники ($3\times 16=48$ разрезов). Всего ровно 50 разрезов.

Критерии. Только ответ — 0 баллов.

Пример на 50 разрезаний — 2 балла.

Доказательство минимальности 50 — 5 баллов. Эти баллы складываются из доказательства следующих утверждение:

- После n разрезов количество вершин не более $4n + 4$ — 2 балла;
- После n разрезов количество вершин не менее $3n + 54$ — 2 балла;
- Из двух предыдущих оценок $n \geqslant 50$ — 1 балл.

7.5. Дома у Антона Павловича живёт 198 котов. Все они имеют разный вес, а также разную скорость. Известно, что в любой группе из 100 котов самый толстый из них является одновременно и самым быстрым из них. Докажите, что можно так выбрать группу из 100 котов, что самый худой из них окажется одновременно и самым медленным из них.

Решение. Рассмотрим самого толстого кота. Каких бы 99 котов к нему ни добавить, он будет и самым быстрым среди них. Значит, он и толще, и быстрее каждого из остальных котов. Присвоим этому коту номер 1 и запрём его на балконе. Из тех котов, что остались, опять выберем самого толстого. Каких бы 99 котов к нему ни добавить, он будет и самым толстым и самым быстрым среди них. Значит, он и толще, и быстрее каждого из оставшихся котов. Присвоим этому коту номер 2 и также запрём его на балконе. Из оставшихся снова выберем самого толстого кота. И так будем действовать до тех пор, пока на балконе не будут заперты 99 котов. Все они и толще, и быстрее остальных, поэтому добавив к ним произвольного кота из оставшихся, получим искомую группу из 100 котов, в которой добавленный является и самым худым, и самым медленным одновременно.

Критерии. Идея рассмотрения самого толстого или самого быстрого кота — 1 балл.

Доказательство того, что самый толстый кот является и самым быстрым — ещё 1 балл.