Всесибирская открытая олимпиада школьников 2022-2023 г.г. по математике
Отборочный этап
7 класс
Решения

7.1. В верном числовом равенстве одинаковые цифры заменили одинаковыми буквами, а разные — разными. Известно, что получилось

$$\text{Я} + \text{ДЕД} = \text{ТЫ} + \text{НЕТ}.$$

Приведите вариант исходного равенства. *(Достаточно привести один пример.)*

Решение. Например, подходит

$$3 + 202 = 96 + 109$$

Критерии. Любой верный пример — 7 баллов.

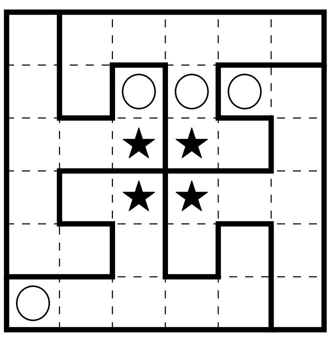
7.2. Из Новосибирска в Павлодар выехал автобус с программистами. Когда он проехал 70 км, по тому же маршруту из Новосибирска отправился на машине Павел Викторович, который догнал программистов в Карасуке. После этого Павел проехал ещё 40 км, а автобус за то же время — всего 20 км. Найдите расстояние от Новосибирска до Карасука, если и машина, и автобус ехали с постоянными скоростями. *(Приведите полное решение, а не только ответ.)*

Решение. Так как за то время, пока машина проехала 40 км, автобус проехал в два раза меньше, его скорость в точности в два раза меньше скорости машины. Но тогда, когда автобус проедет 70 км после выезда машины, та проедет 140 и как раз догонит автобус. По условию это произошло в Карасуке, значит, 140 км и есть ответ.

Критерии. Только ответ — 1 балл.
Ответ с проверкой (например, для конкретных скоростей) — 2 балла.
Доказано, что скорость машины в два раза больше скорости автобуса — 3 балла.

7.3. Разрежьте данный квадрат 6×6 по линиям сетки на четыре равные части таким образом, чтобы каждая из них содержала ровно один кружок и ровно одну звёздочку. *(Достаточно привести один пример. Напомним, что фигуры являются равными, если их можно совместить наложением.)*

Решение. Пример разрезания изображён ниже.



Критерии. Любое верное разрезание — 7 баллов (хотя есть подозрение, что приведённое разрезание является единственно возможным).

7.4. На некотором острове живёт 2022 человека, каждый из которых является либо рыцарем, который всегда говорит правду, либо лжецом, который всегда врёт. Однажды все жители этого острова встали в круг, и им по очереди был задан вопрос «Является ли лжецом твой сосед слева?», на который суммарно было получено 2 ответа «Да» и 2020 ответов «Нет». После этого всем был задан вопрос «Является ли лжецом твой сосед справа через одного?», на которой тоже было получено 2 ответа «Да» и 2020 ответов «Нет». Сколько ответов «Да» будет получено, если всех спросить «Является ли лжецом человек, стоящий в круге напротив тебя?»? *(Найдите все возможные ответы и докажите, что других нет.)*

Решение. Будем обозначать рыцарей и лжецов через Р и Л соответственно. Заметим, что в паре соседних РР или ЛЛ правый человек не может сказать, что слева стоит лжец. Значит, на первый вопрос положительно могли ответить только в парах РЛ и ЛР. Но это значит, так как ответов «Да» было два, что весь круг представляет одну группу подряд идущих лжецов и одно группу подряд идущих рыцарей (а на двух стыках этих групп и прозвучало «Да»).
Рассмотрим теперь второй вопрос. Нам уже понятно, что и рыцарей, и лжецов есть хотя бы по одному человеку. Предположим, что и рыцарей, и лжецов хотя бы два. Тогда «Да» скажут два самых правых рыцаря и два самых правых лжеца. То есть, ответов будет уже четыре, что противоречит условию. Значит, либо рыцарей, либо лжецов всего один человек.
На третий вопрос «Да» ответят только рыцарь и лжец, стоящие друг напротив друга. Но из предыдущего абзаца мы уже знаем, что такая пара только одна, поэтому ответов «Да» опять будет два.

Критерии. Только ответ — 0 баллов.
Только ответ с примером конкретной расстановки — 1 балл.
Доказательство первого абзаца — 3 балла.
Доказательство второго абзаца — ещё 3 балла.

7.5. Дана пустая клетчатая доска 3×3. За один ход разрешается выбрать любые три клетки, образующие уголок (повёрнутый как угодно), и положить в них по одной шашке. Может ли через несколько ходов оказаться, что во всех клетках лежит одинаковое (ненулевое) количество шашек? *(Обоснуйте свой ответ.)*

Решение. Предположим, это возможно, и через несколько ходов в каждой клетке будет лежать по n шашек. Тогда всего на доске их $9n$, а так как на каждом ходу их добавляется по три штуки, сделано было $3n$ ходов. Но заметим, что в каждую из четырёх угловых клеток мы можем класть шашки только отдельными ходами, так как никакой уголок не содержит сразу двух из них. Значит, в каждый из углов было положено n раз отдельными ходами, то есть, всего было сделано хотя бы $4n$ ходов, что противоречит предыдущим рассуждениям. Значит, предположение неверно, и указанная ситуация невозможна.