Всесибирская открытая олимпиада школьников 2022-2023 г.г. по математике
Заключительный этап
8 класс
Решения

8.1. Пять автобусов стоят в ряд друг за другом в пробке, причём в любых двух из них едет разное ненулевое число пассажиров. Назовём двух различных людей *сострадальцами*, если они едут либо в одном и том же автобусе, либо в соседних. Оказалось, что у каждого пассажира есть либо ровно 20, либо ровно 30 сострадальцев. Приведите пример, как такое может быть возможно.

Решение. Например, пусть в автобусах едет 12, 9, 10, 2 и 19 человек соответственно. Пример не единственный. Его легко построить, если догадаться, что в среднем автобусе должно быть 10 человек. Действительно, и в первых двух автобусах, и в первых трёх должно быть 21 или 31 пассажиров. Значит, в первых двух 21 человек суммарно, а в первых трёх — 31.

Критерии. Любой верный пример — 7 баллов.

Только замечено, что в последовательных автобусах 21 или 31 человек — 1 балл.

Только замечено, что в среднем автобусе 10 человек — 3 балла.

8.2. На некотором острове живут только рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда врут. Как-то раз 1001 житель этого острова встали в круг, и каждый из них сказал: "Все десять человек, следующие за мной по часовой стрелке, являются лжецами". Сколько среди вставших в круг могло быть рыцарей?

Ответ. 91 рыцарь.

Решение. Заметим, что все люди не могут быть лжецами, так как тогда бы получилось, что каждый из них говорит правду. Значит, среди этих людей есть хотя бы один рыцарь. Пронумеруем всех людей так, чтобы рыцарь был 1001-м по счёту. Тогда 10 человек с номерами от 1 до 10 — лжецы (это следует из заявления рыцаря). Кроме того, 10 человек с номерами 991-1000 — тоже лжецы, поскольку произнесли неверное утверждение (среди десяти человек, стоящих после них, есть рыцарь). Значит, так как эти 10 человек стоят подряд вдоль нашей окружности после человека номер 990, то он сказал правду и, следовательно, также является рыцарем. Повторяя рассуждения для него, получим, что люди с номерами 980-989 являются лжецами, и так далее. В итоге получим, что рыцарями являются люди с номерами 1001, 990, 979, $\ldots$, 11, то есть всего их $1001/11 = 91$ человек.

Отметим для полноты рассуждения, что мы доказали, что если расстановка возможна, то она выглядит именно так. Несложно проверить, что противоречий нет, и так люди действительно могли встать.

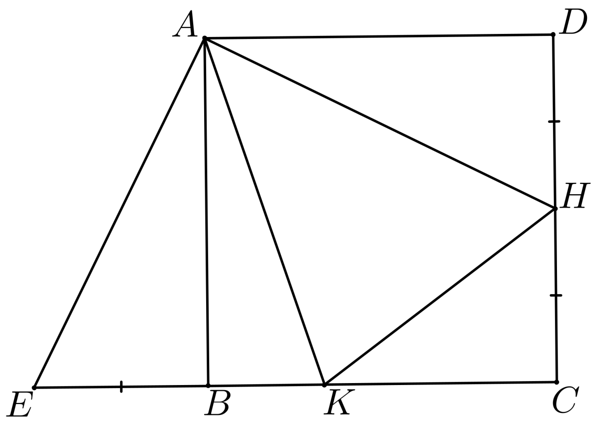
Критерии. Только ответ — 0 баллов.

Только ответ с примером расстановки — 2 балла.

Не рассмотрен случай, когда рыцарей нет — баллы не снимать.

Не проверено, что полученная расстановка подходит — баллы не снимать.

8.3. В квадрате $ABCD$ точка H — середина стороны CD, а K — такая точка на стороне BC, что $KC = 2KB$. Докажите, что KA является биссектрисой угла BKH.



Решение. Примем сторону квадрата равной 6. Тогда $DH = HC = 3$, $BK = 2$, $KC = 4$. Отложим на продолжении BC за точку B точку E таким образом, что $BE = HC = 3$.

Заметим, что прямоугольные треугольники ABE и ADH равны по двум катетам, поэтому $AE = AH$. Кроме того, $KE = KB + BE = 5$, а из теоремы Пифагора для треугольника HKC имеем $HK^2 = HC^2 + KC^2 = 9 + 16 = 25$, откуда $HK = 5$. Но тогда треугольники AEK и AHK равны по трём сторонам, откуда следует $\angle AKE = \angle AKH$, что и требовалось доказать.

Критерии. Отмечена точка E — 1 балл.

Доказано, что $KE = KH$ — ещё 2 балла.

8.4. Назовём число *замечательным*, если его можно разложить в сумму 2023 слагаемых (не обязательно различных), каждое из которых является натуральным составным числом. Найдите наибольшее целое число, не являющееся замечательным.

Ответ. $4 \times 2023 + 3 = 8095$.

Решение. Заменим 2023 на n и будем решать задачу в общем случае для суммы из $n \geqslant 2$ составных слагаемых. Докажем, что ответ равен $4n + 3$, откуда, в частности, получим ответ на исходную задачу.

Утверждение 1. Число $4n + 3$ не является замечательным.

Доказательство утверждения 1. Заметим, что $4n + 3$ является нечётным, поэтому в разложении его в сумму должно присутствовать хотя бы одно нечётное слагаемое. Минимальное нечётное составное число равно 9, а чётное — 4. Поэтому сумма из n слагаемых равна хотя бы

$$9 + 4(n - 1) = 4n + 5 > 4n + 3,$$

откуда и следует, что $4n + 3$ не может быть разложено в сумму n составных слагаемых, то есть не является замечательным. $\square$

Утверждение 2. Любое натуральное число большее $4n + 3$ является замечательным.

Доказательство утверждения 2. Рассмотрим число $a > 4n + 3$. Если оно чётно, то его можно записать в виде

$$a = (4n - 4) + b = b + \underbrace{4 + 4 + \ldots + 4}_{n-1},$$

где $b \geqslant 8$ — некоторое чётное число, являющееся составным. Если же a нечётно, то

$$a = 4n + 1 + c = 9 + (4n - 8) + c = 9 + c + \underbrace{4 + 4 + \ldots + 4}_{n-2},$$

где $c \geqslant 4$ — некоторое чётное число, являющееся составным. $\square$

Итого, число $4n+3$ не замечательное, а все бóльшие являются замечательными. Отсюда и получаем ответ на вопрос задачи.

Критерии. Доказательство утверждения 1 или эквивалентного ему — 3 балла.

Доказательство утверждения 2 или эквивалентного ему — по 2 балла за чётный и нечётный случаи.

8.5. После удачного ограбления поезда 102 разбойника поделили добытые рубины, сапфиры и изумруды таким образом, что каждому суммарно досталось ровно 100 драгоценных камней. Докажите, что верно хотя бы одно из следующих двух утверждений:

- Найдутся два разбойника, у которых поровну и рубинов, и сапфиров, и изумрудов;
- Найдутся два разбойника, у которых разное количество и рубинов, и сапфиров, и изумрудов.

Решение. Предположим противное, тогда у любых двоих совпадает количество камней ровно одного вида (ровно два количества совпасть не могут, так как тогда совпадет и третье из-за того, что их суммы равны одному числу 100).

Выделим одного разбойника A, пусть ему досталось r рубинов, s сапфиров и z изумрудов. Так как у каждого из остальных должно совпасть с A ровно одно из количеств, остальные разбойники разбиваются на три группы: в первой у всех r рубинов, во второй у всех s сапфиров, в третьей у всех z изумрудов (некоторые группы могут быть пустыми). В какой-то группе найдутся хотя бы два человека, пусть, например, это B и C из первой группы.

Предположим, что есть хотя бы один разбойник D, входящий в другую группу, для определенности вторую. Тогда у B и D различаются и количества рубинов (у B их r, у D — другое количество, так как он во второй группе), и количества сапфиров (у D их s, у B — другое количество, так как он в первой группе). Значит, у них поровну изумрудов. Заменяя в этом рассуждении B на C, получаем, что у C и D тоже поровну изумрудов. Значит, у B и C поровну изумрудов, но у них также поровну рубинов (по r штук). Противоречие.

Значит, такого человека не нашлось, и все разбойники находятся в первой группе. Но тогда у них у всех одинаковое количество рубинов — k штук. Но сапфиров у каждого из них может быть $0 \leqslant s \leqslant 100$, а разбойников 102, поэтому одно из 101 возможных значений s будет принято хотя бы дважды, откуда у этих двух разбойников будет поровну и рубинов, и сапфиров. Противоречие.

Критерии. Замечено, что в предположении противного у любых двух людей совпадает ровно 1 группа — 1 балл.