Всесибирская открытая олимпиада школьников 2022-2023 г.г. по математике
Отборочный этап
8 класс
Решения

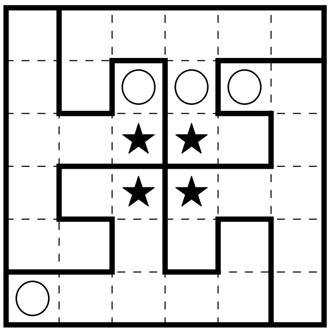
8.1. Из Новосибирска в Павлодар выехал автобус с программистами. Когда он проехал 70 км, по тому же маршруту из Новосибирска отправился на машине Павел Викторович, который догнал программистов в Карасуке. После этого Павел проехал ещё 40 км, а автобус за то же время — всего 20 км. Найдите расстояние от Новосибирска до Карасука, если и машина, и автобус ехали с постоянными скоростями.

Решение. Так как за то время, пока машина проехала 40 км, автобус проехал в два раза меньше, его скорость в точности в два раза меньше скорости машины. Но тогда, когда автобус проедет 70 км после выезда машины, та проедет 140 и как раз догонит автобус. По условию это произошло в Карасуке, значит, 140 км и есть ответ.

Критерии. Только ответ — 1 балл.
Ответ с проверкой (например, для конкретных скоростей) — 2 балла.
Доказано, что скорость машины в два раза больше скорости автобуса — 3 балла.

8.2. Разрежьте данный квадрат 6×6 по линиям сетки на четыре равные части таким образом, чтобы каждая из них содержала ровно один кружок и ровно одну звёздочку.

Решение. Пример разрезания изображён ниже.



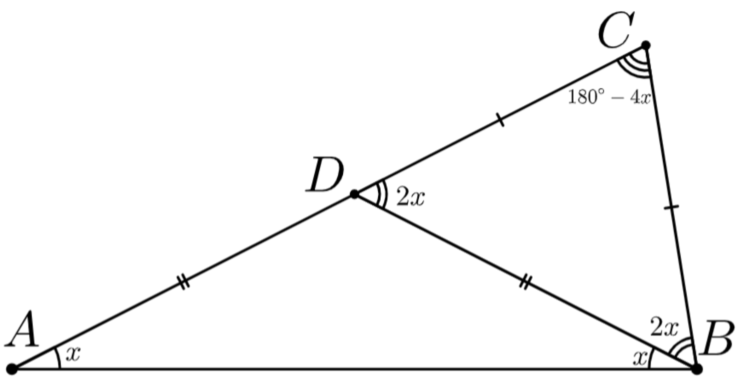
Критерии. Любое верное разрезание — 7 баллов (хотя есть подозрение, что приведённое разрезание является единственно возможным).

8.3. Антон, Боря, Вова, Гриша и Дима соревновались в поедании бууз, хинкалей и пельменей. В каждом из трёх состязаний первое место занял мальчик в серых штанах, второе — в бурых, третье — в малиновых (все носят ровно одни штаны). Кроме того, известно, что меньше всего бууз съел Антон, хинкалей — Дима, пельменей — Вова. Могут ли у Бори и Гриши быть штаны одинакового цвета?

Решение. Заметим, что мальчиков пять, а рассматриваемых цветов три. Значит, какой-то из них точно встречается не больше одного раза. Пусть это серый цвет (другие случаи рассматриваются аналогично). Предположим, штаны серого цвета у Антона. Но тогда в соревновании по поеданию бууз не мог победить мальчик в серых штанах. Аналогично, серые штаны не у Димы и не у Вовы. Значит, они у Бори или у Гриши. Но такие штаны всего одни, значит, одинаковые штаны у этих двоих быть не могут.

Критерии. Замечено, что один из цветов встречается ровно 1 раз — 2 балла.

8.4. В треугольнике ABC на стороне AC отмечена такая точка D, что $BC = CD$. Найдите AD, если известно, что $BD = 13$, а угол CAB в три раза меньше угла CBA.



Решение. Пусть $\angle CAB = x$. Тогда $\angle CBA = 3x$ и $\angle ACB = 180^\circ - 4x$. По условию треугольник BCD равнобедренный, поэтому $\angle CDB = \angle CBD = (180^\circ - \angle BCD)/2 = 2x$. Следовательно, $\angle DBA = \angle ABC - \angle DBC = 3x - 2x = x = \angle DAB$. Значит, треугольник ABD равнобедренный, и $AD = BD = 13$.

8.5. Вася выписал на доску набор различных натуральных чисел, каждое из которых не превосходит 2023. Оказалось, что для любых двух написанных a и b число $a + b$ не делится нацело на число $a - b$. Какое наибольшее количество чисел мог выписать Вася?

Решение. Докажем, что ответ равен $\lceil \frac{2023}{3} \rceil = 675$.
Оценка. Докажем, что больше 675 чисел Вася написать не мог. Для этого рассмотрим три любых подряд идущих числа a, $b = a + 1$ и $c = a + 2$. Заметим, что соседние числа выписаны быть не могут (иначе их разница равна единице, а любое число делится на 1). Поэтому максимум могут быть выписаны только a и c. Но если они выписаны, то их сумма равна $a + (a + 2) = 2(a + 1)$, что делится на разность $(a + 2) - a = 2$. Подводя итог, из любых трёх последовательных чисел может быть выписано максимум одно. Но тогда на доске может быть максимум одно число из 1, 2 и 3; максимум одно из 4, 5 и 6; $\ldots$; максимум одно из 2020, 2021 и 2022. То есть, из первых 2022 чисел может быть выписано максимум 674 плюс число 2023, итого 675.
Пример. Приведём пример набора из 675 чисел. Пусть Вася выписал все числа вида $3n + 1$ для n от 0 до 674, то есть, 1, 4, 7, $\ldots$, 2020, 2023. Заметим, что сумма двух таких чисел имеет вид $(3n + 1) + (3m + 1) = 3(n + m) + 2$, что не делится на 3, а разность равна $(3n + 1) - (3m + 1) = 3(n - m)$, что кратно трём. Но число, не делящееся на 3, не может делиться на число, которое на 3 делится. Поэтому условия задачи выполнены, и этот набор из 675 чисел подходит.

Критерии. Только оценка — 3 балла.
Только пример с доказательством, что он подходит — 3 балла.