Решения заданий Заключительного этапа
Всесибирской открытой олимпиады школьников
по математике 2022-23 гг.

9 класс. Решения.

Все задачи оцениваются из 7 баллов. Каждое верное решение, вне зависимости от длины и степени красивости, оценивается в 7 баллов

9.1. Конечное множество различных действительных чисел X назовём *хорошим*, если каждое число из X можно представить в виде суммы двух других различных чисел из X. Какое минимальное количество чисел может содержать хорошее множество X?

Ответ. 6.

Решение. Из условия следует, что X содержит не меньше трёх чисел, значит, в нём есть ненулевые числа. Умножая при необходимости все числа на минус один, можем считать, что X содержит положительные числа, выберем из них наибольшее число M. По условию, оно равно сумме двух других различных чисел из X, каждое из которых меньше него. Из максимальности M следует, что оба этих числа положительны. Значит, X содержит не меньше трёх различных положительных чисел. Рассмотрим минимальное из положительных число $\boldsymbol{m}$, оно равно сумме двух других различных чисел из X, одно из которых должно быть отрицательным в силу минимальности $\boldsymbol{m}$**.** Теперь выберем минимальное отрицательное число N из X, оно также равно сумме двух других различных чисел из X, каждое из которых больше него. Из минимальности N следует, что оба этих числа отрицательны. Следовательно, X содержит не меньше трёх различных отрицательных чисел. Значит, хорошее множество X должно содержать не менее шести чисел.

Примером хорошего множества из шести элементов является множество X={-3, -2, -1, 1, 2, 3}.

Критерии оценивания. (●) Приведён пример хорошего множества из шести чисел: 2 балла. (●) Доказано, что X содержит не меньше 3 положительных или отрицательных чисел: 3 балла. (●) Доказано, что X обязательно содержит числа разных знаков: 2 балла.

9.2. Два простых числа называются *последовательными*, если не существует простого числа, которое больше одного из них, и меньшего другого. Докажите, что сумму любых двух последовательных простых нечётных чисел всегда можно представить в виде произведения трёх натуральных сомножителей, каждый из которых больше единицы.

Доказательство. Сумма S двух последовательных нечётных простых чисел $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ является чётным числом, поэтому в качестве первого сомножителя можно взять двойку. Если число $S/2$, большее единицы, не является простым, то, разложив его на два нееденичных множителя, получим требуемое в условии представление S в виде произведения трёх натуральных сомножителей, каждый из которых больше единицы. Если же число *S/2* является простым, то $\boldsymbol{p}<S/2<\boldsymbol{q}$, поэтому оно будет простым числом, лежащим между последовательными $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$, что противоречит условию задачи.

Критерии оценивания. (●) Замечено, что $p+q$ представляется в виде произведения двух неединичных множителей: 1 балл. (●) Нет явного замечания $\boldsymbol{p}<S/2<\boldsymbol{q}$: минус 1 балл.

9.3. Два равносторонних треугольника ABC и CDE расположены на плоскости так, что их единственной общей точкой является вершина C. Пусть точки F, G и H являются серединами отрезков BC, CD и AE соответственно. Докажите, что треугольник FGH тоже является равносторонним. Длины сторон треугольников ABC и CDE различны.

Доказательство. Продлим отрезок CF за вершину F ещё на столько же, получим точку M. Диагонали четырёхугольника ACEM делятся точкой пересечения H пополам, поэтому он – параллелограмм. Отрезки FG, GH и FH являются средними линиями в треугольниках BCD, MCD и BCM, поэтому их равенство равносильно равенству отрезков BD, MD и BM. Последнее будет следовать из равенства треугольников BCD, DEM и BAM. Докажем его, установив равенства углов и прилегающих сторон к вершинам C, E и A.

Действительно, AB=CB, как стороны равностороннего треугольника ABC. По той же причине AB=AC, а AC=ME, как противоположные стороны параллелограмма ACEM. Аналогично, AM=CE, как вторая пара противоположных сторон параллелограмма ACEM, и CE=CD=DE, как стороны равностороннего треугольника CDE. Равенства прилегающих сторон доказаны. Угол BAM равен сумме угла CAM и 60°, а угол MED равен сумме угла CEM и 60°. Углы CAM и CEM равны, как противоположные в параллелограмме ACEM, значит углы BAM и MED равны. Обозначим величину угла CAM за $\boldsymbol{x}$, тогда угол BCD равен $360°-(180°-\boldsymbol{x})-60°-60°=60°+\boldsymbol{x}$, что равняется углу BAM. Доказательство равенства треугольников BCD, DEM и BAM завершено. Из него, как замечено выше, следует равенство отрезков BD, MD, BM и утверждение задачи.

Критерии оценивания. В условии предполагалось, что порядки следования вершин треугольников ABC и CDE одинаковы – одновременно по или против часовой стрелки, это естественным образом следует из порядка следования соответствующих букв в условии. За не рассмотрение случая, когда вершины следуют в разных порядках и утверждение задачи неверно, снятия баллов не производилось. (●) Тем, кто рассмотрел только этот последний случай и утверждал, что задача некорректна, ставился 1 балл (или 2 балла). (●) Кроме того, возможные взаимные расположения треугольников делятся на такие, когда оба треугольника лежат в одной полуплоскости относительно прямой AE, и такие, когда это не так. Тогда возможны решения задачи, работающие в одном случае и не работающие в другом. Если в работе эти случаи отдельно не рассматривались, снимались два балла. (●) сделаны частные продвижения, например, доказано равенство двух из трёх отрезков – сторон треугольника FGH: 3 балла.

9.4. В какое максимальное число цветов можно окрасить все клетки квадрата 4 на 4 так, чтобы любой квадрат размера 2 на 2 клетки обязательно содержал хотя бы две клетки одинакового цвета?

Ответ. В 11 цветов.

Решение. Докажем, что максимальное число цветов в условиях задачи не больше 11. Рассмотрим в квадрате 4 на 4 пять квадратов размера 2 на 2 клетки: четыре угловых и центральный. Угловые квадраты 2 на 2 не пересекаются, а центральный имеет по одной общей клетке с каждым из угловых. По условию, каждый угловой квадрат 2 на 2 содержит клетки не более трёх различных цветов, всего не больше 12. Но если среди этих четырёх троек цветов в угловых квадратах нет повторяющихся, то центральный квадрат 2 на 2 должен содержать клетки четырёх различных цветов - по одной из каждой тройки, что противоречит условию. Следовательно, общее число различных цветов, в которые окрашены клетки квадрата 4 на 4 не превосходит 12-1=11. Если же хотя бы в одном из угловых квадратов 2 на два использовано не больше двух различных цветов, то всего различных цветов сразу не больше 11.

Пример раскраски квадрата 4 на 4 в 11 цветов, удовлетворяющей условию задачи выглядит так: нижняя горизонталь квадрата красится в различные цвета 1,2,3 и 4, вторая горизонталь – вся в цвет 5, третья горизонталь в различные цвета 6,7,8 и 9, а четвёртая горизонталь – в цвета 10,7,11.9.

Критерии оценивания. (●) Доказательство максимальности 11 цветов: 4 балла, (●) Если в доказательстве максимальности 11 цветов вообще не рассмотрен случай, когда в одном из угловых квадратов не более двух различных цветов: минус 1 балл. (●) Пример правильной окраски в 11 цветов: 3 балла.

9.5. В компании из $n > 1$ человек некоторые её члены знакомы друг с другом, а некоторые – нет. При этом, если X знаком с Y, то и Y знаком с X, сам человек не считается своим знакомым или незнакомым. Найти все n, при которых в компании всегда найдутся два человека А и Б, обладающих в этой компании одинаковым количеством знакомых, и таких, что найдётся либо человек В знакомый одновременно с А и Б, либо человек Г, не знакомый одновременно с А и Б.

Ответ. Все ***n***, не равные 2 и 4.

Доказательство. 1. Примеры. При ***n***=2 в любом случае оба участника имеют одинаковое число знакомых 0 или 1, но отсутствуют кандидаты на роль общего знакомого или незнакомого. При ***n***=4 единственным примером, когда нельзя найти В или Г, является компания, где первый знаком со вторым, второй с третьим, а третий – с четвёртым, и других знакомств нет.

2. Приведём хорошо известное доказательство того, что в любой компании найдутся хотя бы два человека, имеющих в ней одинаковое число знакомых. Количество знакомых у члена компании из n человек может равняться любому натуральному числу от 0 до $n-1$. При этом в компании не могут

одновременно быть люди, число знакомых у одного из которых равно 0, а у другого $n-1$, потому что первый из них не знает в компании никого, включая второго, а второй знает всех, включая первого. Такая ситуация противоречит условию, что, если X знаком с Y, то и Y знаком с X. Следовательно, количество знакомых для любого из n членов компании является числом либо из интервала от 0 до $n-2$, либо из интервала от 1 до $n-1$. В обоих интервалах всего по $n-1$ числу, поэтому из принципа Дирихле следует, что, как минимум, у каких-то двух членов компании числа знакомых совпадают.
3. До этого момента шёл стандартный текст, далее начинается специфика именно этой задачи. Если предположить, что у людей А и Б, имеющих одинаковое количество знакомых, нет общих знакомых и незнакомых в этой компании, то вся компания состоит из А, Б, знакомых А и знакомых Б, которых поровну. Следовательно, любые два человека А и Б, имеющие одинаковое количество знакомых, и не имеющие общих знакомых и незнакомых в этой компании, имеют ровно по ***n***/2-1 знакомых в случае, когда они не знакомы между собой, или ровно по ***n***/2 знакомых в случае, когда они знакомы. Поэтому, если в компании есть пары людей с другими равными количествами знакомых, то у них есть либо общие знакомые, либо общие незнакомые и задача решена. В частности, отсюда следует, что при всех нечётных ***n*,** больших одного, требуемые в условии А и Б найдутся.
4. Далее считаем, что ***n*** больше двух, и в этой компании у любой пары людей с одинаковым числом знакомых нет общих знакомых и незнакомых. Тогда в компании не может быть людей с 0 или $n-1$ знакомыми, так как они и были бы соответственно общими знакомыми или незнакомыми. Совпадать с А или Б эти люди не могут, так как при ***n*** больше двух у них не меньше одного и не больше ***n***/2 <***n-1*** знакомых. Следовательно, количество знакомых для любого из n членов этой компании является числом из интервала от 1 до $n-2$, где всего $n-2$ числа, причём повторяться могут только два значения, $\frac{n}{2}-1$ и ***n***/2.
Случай 1. В компании найдутся как минимум три члена А, Б и В, каждый из которых знает ровно $\frac{n}{2}-1$ из остальных членов компании, причём В является знакомым либо А, либо Б. Можно считать, что он знает А, тогда он не может знать ни одного знакомого Б, иначе тот был бы общим знакомым Б и В. Следовательно. все его знакомые – это А и знакомые А, отличные от самого В. В таком случае Б является общим незнакомым для А и В и требуемая в условии пара найдена.
Случай 2. В компании найдутся как минимум три члена А, Б и В, каждый из которых знает ровно ***n***/2 из остальных членов компании. Но при этом А, Б и В должны знать друг друга, поэтому В будет общим знакомым А и Б.
Случай 3. В компании найдутся ровно два знакомых между собой А и Б, каждый из которых знает в точности ***n***/2 других членов компании, и ровно два других, незнакомых между собой В и Г, каждый из которых знает в точности $\frac{n}{2}-1$ из остальных членов компании. При ***n***=4 это как раз и даёт

единственный контрпример, далее $n>4$. Все знакомые А должны иметь разное количества знакомых, иначе А был бы общим знакомым для двух из них, аналогично и для знакомых Б, поэтому можно считать, что А знает В, а Б знает Г. Назовём А-участниками членов компании, знакомых с А и отличных от В, и Б-участниками членов компании, знакомых с Б и отличных от Г. Участники В и Г не могут иметь общих знакомых, поэтому В знает столько же Б-участников компании, сколько Г знает А-участников, и В знает столько же А-участников компании, сколько Г знает Б-участников. Важно отметить, что каждый член компании, кроме А,Б,В и Г знает ровно двух из А,Б,В и Г. Рассмотрим новую компанию, образованную всеми членами первоначальной компании, отличными от А,Б,В и Г, среди них снова найдётся хотя бы пара членов Д и Е с одинаковым количеством знакомых в новой компании. При переходе к новой компании мы удалили у каждого по два знакомства, значит, и в прежней компании у Д и Е было одинаковое количество знакомых, что противоречит рассматриваемому случаю. Следовательно, при чётных $n>4$ рассматриваемый случай невозможен, что завершает доказательство.

Критерии оценивания. Ввиду того, что условие задачи на олимпиаде сначала было дано вообще в некорректном виде, а затем - без привязки к n, тем, кто просто привёл в решении пример для $n=4$, жюри вынуждено было ставить 7 баллов. За пример при $n=2$ решено было ставить 2 балла, виду его не слишком большой содержательности. Далее приводятся критерии проверки решений той задачи, которая предполагалась.

(●) Воспроизведено стандартное доказательство существование пары членов компании с одинаковым числом знакомых: 2 балла. (●) Доказано, что любые два человека, имеющих одинаковое количество знакомых, и не имеющих общих знакомых и незнакомых в этой компании, имеют ровно по $\frac{n}{2}-1$ или $\frac{n}{2}$ знакомых: 1 балл. (●) Доказано, что количество знакомых для любого члена этой компании является числом из интервала от 1 до $n-2$: 1 балл. (●) Рассмотрение случая с тремя равными членами А, Б и В: 1 балл. (●) Рассуждение с двумя парами равных людей А,Б и В,Г: 2 балла. (●) Баллы за различные продвижения суммируются, но если в решении пропущен случай цепи из четырех вершин (контрпример), ставится не более 4 баллов