Отборочный этап

Решения заданий
Всесибирской олимпиады школьников по математике

9 класс

Все задачи оцениваются из 7 баллов. Каждое верное решение, вне зависимости от длины и степени красивости, оценивается в 7 баллов

9.1. В течение 100 дней каждый из шести друзей посетил бассейн ровно 75 раз, не более одного раза в день. Обозначим за *n* количество дней, в которые бассейн посетили не менее пяти из них. Определить максимальное и минимальное возможные значения числа *n*.

Ответ. 90 и 25 соответственно.

Решение. Общее число посещений бассейна за 100 дней шестью друзьями равно $75\cdot 6=450$, следовательно, количество дней, в которые бассейн посетили не менее пяти из них не больше $\frac{450}{5}=90$. С другой стороны, если количество таких дней равно *n,* то общее число посещений друзьями бассейна, равное 450, не превосходит $6n+4(100-n)=400+2n$, откуда $n\geq 25$.

Осталось привести примеры, когда эти значения достигаются. Для этого запишем их фамилии по порядку: первый, второй,.., шестой, и так 45 раз подряд. Затем сначала поделим их на 90 пятёрок, идущих подряд, эти пятёрки посетят бассейн в первые 90 дней. В оставшиеся 10 дней в этом примере в бассейн не пойдёт никто.

Во втором случае в первые 25 дней в бассейн сходят первые 25 шестёрок последовательных друзей, а в оставшиеся 75 дней – 75 оставшихся последовательных четвёрок.

Критерии оценивания. (●) Оценки $n\geq 25$ и $n\leq 90$ - по 2 балла каждая, (●) примеры для $n=25$ и $n=90$ по 1 баллу за каждый. (●) Если сделано всё: 7 баллов.

9.2. Вася поменял местами цифры трехзначного числа *A* так, что ни одна цифра нового трёхзначного числа *B* не совпала с цифрой числа А, стоящей в том же разряде. Оказалось, что разность *A*- *B* - двузначное число, являющееся полным квадратом. Чему может быть равно число *A*? Найдите все возможные варианты.

Ответ. Всего 20 решений: $A=218{,}329$, $A=213{,}..{,}879$, $A=706{,}817{,}928$, $A=201{,}312{,}..{,}978$.

Решение. Обозначим $A=\overline{abc}$, где $a,b,c-$цифры его сотен, десятков и единиц соответственно. Из принципа Дирихле и условия следует, что все они различны, так как нельзя рассадить минимум 4 кроликов (две пары одинаковых цифр в А и В) по 3 клеткам (разрядам), чтобы каждому досталось отдельное жильё. По условию либо $B=\overline{bca}$, либо $B=\overline{cab}$.

Кроме того, разность А и В двузначна, следовательно первая цифра А больше первой цифры В на 1 (как мы заметили, первые цифры этих чисел не могут быть равны).

Рассмотрим оба случая.

1) $B=\overline{bca}$. Тогда $A-B=\overline{abc}-\overline{bca}=99a-90b-9c$ - двузначное число, делящееся на 9 и являющееся точным квадратом, то есть 36 или 81. В первом случае $11a-10b-c=4$ и $a=b+1$, то $b+7=c$, откуда $b=1{,}2$ и $A=218{,}329$ - два решения. Во втором случае $11a-10b-c=9$ и $a=b+1$, значит $b+2=c$, откуда $b=1{,}2{,}..{,}7$ и $A=213{,}..{,}879$ - семь решений.

2) $B=\overline{cab}$. Тогда $A-B=\overline{abc}-\overline{cab}=90a+9b-99c$ - двузначное число, делящееся на 9 и являющееся точным квадратом, то есть 36 или 81. В первом случае $10a+b-11c=4$ и $a=c+1$, тогда $c=b+6, a=b+7$, откуда $b=0{,}1{,}2$ и $A=706{,}817{,}928$ - три решения. Во втором случае $10a+b-11c=9$ и $a=c+1$, значит $c=b+1, a=b+2$, откуда $b=0{,}1{,}2{,}..{,}7$ и $A=201{,}312{,}..{,}978$ - восемь решений. Общее число решений равно 2+7+3+8=20.

Критерии оценивания. (●) Рассмотрен полностью только один из случаев для разности 36 или 81: 3 балла. (●) Не рассмотрена часть решений в одном из этих случаев: снимаем 1 балл в каждом случае.

9.3. В треугольнике ABC на сторонах AB и BC выбраны точки K и M соответственно. Докажите что, если угол AMK больше угла BMK, то угол CKM меньше угла BKM.
Доказательство. Обозначим точку пересечения отрезков AM и CK за P. Заметим, что в треугольнике PMK сумма величин углов AMK и CKM равна 180 минус величину KPM, что равно 180 минус величину APC, и равно сумме величин углов PAC и PCA в треугольнике PAC. Величины PAC и PCA соответственно меньше величин углов BAC и BCA исходного треугольника ABC. Следовательно, сумма величин углов AMK и CKM меньше 180 минус величину ABC. Последняя разность равна сумме углов BKM и BMK в треугольнике BMK. Значит, сумма величин углов AMK и CKM меньше суммы величин углов BKM и BMK. Если бы и величина CKM была не меньше величины BKM, то по условию, сумма AMK и CKM была бы больше суммы BKM и BMK – противоречие.
Критерии оценивания. (●)

9.4. У Викентия есть две банки, красная и синяя, а также кучка из 20 камешков. Изначально обе банки пусты. Ход в игре Викентия состоит в том, чтобы переложить камешек из кучки в одну из банок или вернуть камешек из одной из банок в кучку. Количество камешков в банках определяет позицию игры. После каждого хода число камешков в красной банке всегда не меньше числа камешков в синей банке; и в ходе игры ни одна позиция не может повториться. Какое максимальное количество ходов может сделать Викентий?
Ответ. 110**.**
Решение. Позиция в игре Викентия однозначно задаётся парой неотрицательных целых чисел (x, y), и $x+y\le 20$, где $0\le y\le x\le 20$ - числа камешков в синей и красной банках соответственно. Всего в игре Викентия возможна 21+19+17…+1=121 позиция. Назовём позицию *чётной*, если сумма её чисел камешков в банках чётна, и *нечётной* – в противоположном случае. Всего в игре 11+10+…+1=66 чётных позиций и 121-66=55 нечётных. Каждый ход в игре меняет чётность позиции, поэтому всего игра не может содержать более, чем 55 чётных и 56 нечётных позиций (с учётом того, что начинается она с чётной позиции (0,0)), всего 111 позиций. и состоять из не более, чем 111-1=110 ходов.
Приведём пример игры, когда Викентий сможет сделать 110 ходов. При этом он делает единственно возможный первый ход с (0,0) на (1,0), затем все позиции (x, y) с нечётным $x=1,3,5,..,9$ проходит последовательно от $(x,0)$ до (x,x), после чего переходит к $(x+1,x)$, а все позиции с чётным $x=2,4,..,10$ проходит последовательно от $(x,x-1)$ до $(x,0)$, после чего переходит к $(x+1,0)$. После всего указанного он оказывается в позиции (11,0), после чего его стратегия слегка меняется. все позиции (x, y) с нечётным $x=11,13,15,.17$ проходит последовательно от $(x,0)$ до $(x,19-x)$, после чего переходит к $(x+1,19-x)$, а все позиции с чётным $x=12,14,..,18$ проходит последовательно от $(x,20-x)$ до $(x,0)$, после чего переходит к $(x+1,0)$. В итоге он оказывается в позиции (19,0) и совершает последний ход в (20,0). Не пройденными остались позиции (2,2),(4,4),…,(10,10),(11,9),(13,7),...,(19,1) – ровно 10 штук, то есть пройденными в точности 121-10=111 позиций. Совершено как раз 110 ходов.
Критерии оценивания. (●) Доказано, что число ходов не больше 110: 3 балла. (●) Построение примера на 110 ходов с точным обоснованием: 4 балла. (●) Отсутствие точного обоснования примера: минус 2 балла.

9.5. Может ли в некоторой компании у каждого быть ровно 5 друзей, а у каждых двух – ровно 2 общих друга?

Ответ. Нет, не может.

Решение. Пусть A - один из членов этой компании, у него 5 друзей. У каждого члена компании, кроме A, есть два общих друга, являющимися двумя из пяти друзей A. Допустим, что пары общих друзей у A и B, а также у A и C совпадают, обозначим их за D и E. Тогда у D и E не меньше трёх общих друзей, среди которых как минимум A, B и C. что противоречит условию. Следовательно всего в компании, кроме A, людей не может быть больше, чем количество различных пар среди пяти друзей A, то есть не больше десяти. С другой стороны, для каждой такой пары X и Y у них есть ровно два общих друга, один из которых A., а другой Z, отличный от A. По условию, этот Z для разных пар X и Y тоже разный. Значит, всего в компании, кроме A, людей не может быть меньше, чем количество различных пар среди пяти друзей A, то есть не меньше десяти. Следовательно, всего в компании 11 человек. Тогда общее число дружб в компании равно $\frac{11\cdot 5}{2}$ - число нецелое. Полученное противоречие доказывает, что приведённая в условии ситуация невозможна.

Критерии оценивания. (●) Доказательство, что число людей в компании не больше 11: 3 балла. (●) Доказательство, что число людей в компании не меньше 11: 3 балла. (●) Доказательство, что число людей в компании не может равняться 11: 1 балл.