

**Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2022-2023 гг.**

**Отборочный этап**

**10 класс**

*Время написания работы 4 астрономических часа*

*Каждая задача оценивается в 7 баллов*

10.1. Найти все решения в неотрицательных действительных числах системы уравнений  $a(a + b) = b(b + c) = c(c + a)$ .

10.2. Пусть  $A$  — множество из десяти различных положительных чисел (не обязательно натуральных). Определить максимально возможное количество арифметических прогрессий, состоящих из трёх различных чисел множества  $A$ .

**10.3.** Дана окружность  $\Omega$  с центром  $O$  и окружность  $\Omega'$ , которая проходит через  $O$  и пересекает  $\Omega$  в точках  $A$  и  $B$ . На окружности  $\Omega'$  выберем точку  $C$ , отличную от  $O$ , лежащую внутри  $\Omega$ . Прямая  $AC$  ещё раз пересекает окружность  $\Omega$  в точке  $D$ , а прямая  $BC$  ещё раз пересекает окружность  $\Omega$  в точке  $E$ . Докажите, что треугольники  $ABC$  и  $CDE$  равны.

10.4. Рассмотрим все  $7!$  семизначных чисел, получающихся из числа 1234567 всевозможными перестановками цифр. Сколько из них дают остаток 5 при делении на 7?

10.5. Сколько клеток нужно отметить на клетчатой доске 8 на 8 так, чтобы каждая клетка доски, включая отмеченные, была соседней по стороне с некоторой отмеченной клеткой? Найдите все возможные ответы. Считаем, что клетка не является соседней сама с собой.