

**Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2022-2023 гг**  
**Заключительный этап** **9 класс**

*Время написания работы 4 астрономических часа*

*Каждая задача оценивается в 7 баллов*

**9.1.** Конечное множество различных действительных чисел  $X$  назовём *хорошим*, если каждое число из  $X$  можно представить в виде суммы двух других различных чисел из  $X$ . Какое минимальное количество чисел может содержать хорошее множество  $X$ ?

**9.2.** Два простых числа называются *последовательными*, если не существует простого числа, которое больше одного из них, и меньшего другого. Докажите, что сумму любых двух последовательных простых нечётных чисел всегда можно представить в виде произведения трёх натуральных сомножителей, каждый из которых больше единицы.

**9.3.** Два равносторонних треугольника  $ABC$  и  $CDE$  расположены на плоскости так, что их единственной общей точкой является вершина  $C$ . Пусть точки  $F$ ,  $G$  и  $H$  являются серединами отрезков  $BC$ ,  $CD$  и  $AE$  соответственно. Докажите, что треугольник  $FGH$  тоже является равносторонним. Длины сторон треугольников  $ABC$  и  $CDE$  различны.

**9.4.** В какое максимальное число цветов можно окрасить все клетки квадрата  $4$  на  $4$  так, чтобы любой квадрат размера  $2$  на  $2$  клетки обязательно содержал хотя бы две клетки одинакового цвета?

**9.5.** В компании некоторые её члены знакомы друг с другом, а некоторые – нет. При этом, если  $X$  знаком с  $Y$ , то и  $Y$  знаком с  $X$ . Доказать, что в компании всегда найдутся два человека  $A$  и  $B$ , обладающих в этой компании одинаковым количеством знакомых, и таких, что найдётся либо человек  $\Gamma$ , знакомый одновременно с  $A$  и  $B$ , либо человек  $D$ , не знакомый одновременно с  $A$  и  $B$ .