Решения заданий первого этапа 2023-24 гг
Всесибирской открытой олимпиады школьников по математике

10 класс

Все задачи оцениваются из 7 баллов. Каждое верное решение, вне зависимости от длины и степени красивости, оценивается в 7 баллов

10.1. Найти геометрическое место всех точек (x, y) координатной плоскости, для которых при любом значении параметра t из интервала $[-1, 1]$ выполнено неравенство $t^2 + xt + y \geq 0$.

Ответ. Множество всех точек координатной плоскости, лежащих на графике функции
$$g(x) = \left[\begin{array}{l} -x-1, x \in (-\infty,-2), \\ x^2/4, x \in [-2,2], \\ x-1, x \in (2,+\infty). \end{array}\right.$$ и выше него.

Решение. Выражение в левой части неравенства $t^2 + xt + y \geq 0$ из условия является квадратичной функцией $f(t) = t^2 + xt + y$ от переменной t, ветви графика которой направлены вверх. Минимум этой функции достигается при $t_0 = -\frac{x}{2}$ и равен $t_0 = y - \frac{x^2}{4}$.

1) Пусть сначала $t_0 = -\frac{x}{2} < -1$, то есть $x > 2$. Тогда функция $f(t)$ возрастает на интервале $[-1,1]$, и требование в условии равносильно неравенству $f(-1) = y - x + 1 \geq 0$, то есть $y \geq x - 1$.

2) Пусть теперь $t_0 = -\frac{x}{2} > 1$, то есть $x < -2$. Тогда функция $f(t)$ убывает на интервале $[-1,1]$, и требование в условии равносильно неравенству $f(1) = y + x + 1 \geq 0$, то есть $y \geq -x - 1$.

3) Пусть, наконец $t_0 \in [-1,1]$, то есть $x \in [-2,2]$. Тогда требование в условии равносильно неравенству $f(t_0) = y - \frac{x^2}{4} \geq 0$, то есть $y \geq \frac{x^2}{4}$.

Объединяя все три случая, получим ответ задачи – множество всех точек координатной плоскости, лежащих на графике функции $g(x) = \left[\begin{array}{l} -x-1, x \in (-\infty,-2), \\ x^2/4, x \in [-2,2], \\ x-1, x \in (2,+\infty). \end{array}\right.$ и выше него.

Критерии оценивания. (●) Рассмотрение только одного из случаев 1) или 2): 2 балла. (●) Рассмотрение обоих случаев 1) и 2): 3 балла. (●). Рассмотрение только случая 3): 3 балла. (●) Нет строгого и явного обоснования эквивалентности требования условия и возникающих неравенств, эквивалентного исследованию поведения возникающих на интервалах функций: снимаем 1-2 балла.

10.2. Найти все пары целых чисел x, y удовлетворяющих уравнению $(x + y)^2 - 2(xy)^2 = 1$.

Ответ. $(\pm 1,0), (0,\pm 1)$, $\pm(2,1), \pm(1,2)$ - всего 8 решений.

Решение. 1) Если одно из чисел x, y равно 0, то квадрат второго равен 1, поэтому имеем 4 пары решений $(\pm 1,0), (0,\pm 1)$.

2) Если оба числа больше 1, то $x+y\le xy \Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}\le 1$ поэтому левая часть уравнения будет отрицательна и не может равняться 1. Следовательно, если оба x, y положительны, то одно из них равно 1. Скажем, если $y=1$, то $(x+1)^2-2x^2=1 \Leftrightarrow 2x=x^2$, откуда $x=2$. Аналогично при $x=1$ находим $y=2$. В данном случае получаем две пары решений $(2,1),(1,2)$. Случай, когда оба x, y отрицательны сводится к только что рассмотренному умножением обоих чисел на минус единицу, получаем ещё два решения $(-2,-1),(-1,-2)$.
3) Если числа x, y имеют разные знаки, ввиду симметрии можно считать, что x положительно и по модулю не меньше y, тогда $0\le x+y<x$. При этом левая часть уравнения $(x+y)^2-2(xy)^2=(x+y)^2-(xy)^2-(xy)^2\le(x+y)^2-x^2-x^2\le -x^2$ - отрицательна и не может равняться 1.

Другое изложение того же решения. Перепишем уравнение в виде $(x+y)^2=2(xy)^2+1$, тогда $(x+y)^2>2(xy)^2\ge(xy)^2$, откуда $|x+y|>|xy|$. Если одно из чисел x, y равно 0, то квадрат второго равен 1, поэтому имеем 4 пары решений $(\pm1,0),(0,\pm1)$. Если оба переменных отличны от 0, делим неравенство на правую часть, $1<|\frac{1}{x}+\frac{1}{y}|\le|\frac{1}{x}|+|\frac{1}{y}|=\frac{1}{|x|}+\frac{1}{|y|}$. Если оба знаменателя в правой части больше 1, то правая часть не больше 1 и неравенство невозможно. Следовательно, либо $|x|=1$, либо $|y|=1$. Скажем, если $|y|=1$, то $y=\varepsilon=\pm1$, тогда $(x+y)^2-2(xy)^2=(x+\varepsilon)^2-2x^2=1$, откуда $x^2=2\varepsilon x \Leftrightarrow x=2\varepsilon$, что приводит к двум решениям $(x,y)=\pm(2,1)$. Аналогично, случай $|x|=1$ приводит к двум решениям $(x,y)=\pm(1,2)$. В этом решении не нужно отдельно рассматривать знаки каждого переменного.

Критерии оценивания. (●) Рассмотрение только случая натуральных x, y: 3 балла. (●) Рассмотрение случая, когда x, y имеют разные знаки: 2 балла. (●) Рассмотрение случая, когда один из x, y равен 0: 2 балла.

10.3. Пусть ABC — остроугольный треугольник такой, что BC<AC<AB, а O — центр его описанной окружности. Прямые BA и BC вторично пересекаются с описанной окружностью треугольника AOC в точках K и M соответственно. Докажите, что прямые BO и KM перпендикулярны.

Доказательство. Заметим, что наибольшим углом треугольника является угол ACB, средним - угол ABC и меньшим - угол BAC. Дальше будем обозначать величины углов треугольника буквами соответствующих им вершин, $\angle A<\angle B<\angle C$. Докажем, что точка K лежит на стороне AB, а точка M - на продолжении стороны BC за вершину C. Обозначим за E центр описанной окружности равнобедренного треугольника AOC. В описанной окружности треугольника ABC центральный угол AOC вдвое больше вписанного угла ABC, а в равнобедренном треугольнике AOC угол при основании OAC равен 90° минус половину AOC, то есть 90°–B. Аналогично, угол AOB равен 2C, треугольник AOB равнобедренный, поэтому OAB равен 90°- C. В равнобедренном треугольнике AEO угол OAE=AOE равен B. В сумме угол BAE равен сумме OAB и OAE, то есть 90°-C+B<90°, поэтому точка K пересечения описанной окружности треугольника AOC с прямой BA лежит на стороне AB. Аналогично, угол ECB равен 90°-A+B>90°, поэтому точка M пересечения описанной окружности треугольника AOC с прямой BC лежит на продолжении стороны BC за вершину B.
Осталось заметить, что угол OBC равен 90°-A, а угол BMK=CMK равен A, как вписанный в окружность (AOB) и опирающийся там на хорду KC, как и угол KAC=BAC=A.

следовательно, угол между ВО и КМ равен 180°-ОВС-СМК=180°-ОВС - ВМК=180°-(90°-А)-А=90°, что и требовалось доказать.
Критерии оценивания. (●) Доказательство того, что точка К лежит на стороне АВ, а точка М - на продолжении стороны ВС за вершину С: 2 балла. Если это утверждается голословно, при правильном остальном доказательстве, 2 балла снимаются. (●) Если вообще рассматривается другой случай расположения точек К и М с верным в для этого случая доказательством: снимаем 3 балла.

10.4. Круг разделен на $n \geq 3$ секторов, в каждом из которых записано 0 или 1. За один ход можно выбрать любой сектор С, в котором записан 0, изменить цифру в нём на 1 и одновременно изменить символы x и y в двух секторах, соседних с С, на их дополнения *1-x* и *1-y* соответственно. Процесс повторяется в некотором порядке до тех пор, пока хотя бы в одном секторе круга записан 0. В первоначальной конфигурации 0 записан в одном секторе и 1 - во всех остальных. Может ли этот процесс завершиться для а) $n = 31$? б) $n = 30$?
Ответ. а) Да. б) Нет.
Решение. а) Занумеруем секторы числами 1,2,…,31 по часовой стрелке так, чтобы 0 стоял в первом из них. Проделаем операции последовательно с секторами номер 1, 2, 3,.., 29, после чего останется только одна 1 в секторе 29 и 0 – во всех остальных. Разобьём все секторы с нулями на 10 троек соседних, и проделаем 10 операций с секторами номер 3, 6, 7,…,27, 31, центральными в этих тройках. После этого во всех секторах круга будут записаны единицы.

б) Занумеруем секторы числами 1,2,…,30 по часовой стрелке так, чтобы 0 стоял в первом из них. Обозначим за А сумму всех чисел, записанных в секторах, номера которых делятся на 3, а за В и С - суммы всех чисел, записанных в секторах, номера которых дают при делении на 3 остатки 1 и 2 соответственно. При проведении одного хода чётность каждой их этих сумм меняется, следовательно, чётность каждой из разностей А-В, В-С и А-С остаётся неизменной. Однако в начале эти разности равны 1, -1 и 0, среди них две нечётных и одна чётная, а после остановки процесса все они должны стать равными 0, то есть чётными - противоречие.
Критерии оценивания. (●) Пример для пункта а): 3 балла**.** (●) Доказательство, невозможности в пункте б) 4 балла

10.5. Семь ленивых школьников решили посещать математический кружок в соответствиями с выработанными ими правилами приличия: (а) На каждом занятии должен присутствовать хотя бы один человек. (б) Для любых двух занятий множества присутствовавших на этих занятиях школьников должны различаться. (в) Для каждого $n \geq 2$ и всех $k = 1,2,...,n-1$ среди тех, кто присутствует в день с номером n, обязательно должен быть хотя бы один школьник, присутствовавший в день с номером k. Какое максимальное число занятий они смогут посетить, не нарушая этих правил?
Ответ. 64.
Решение. Пример того, как можно посетить 64 занятия: первый из них ходит на каждое занятие, а остальные шесть приходят на них всеми возможными множествами. Постоянное присутствие первого школьника при этом обеспечивает выполнение условий (а) и (в), а разные множества остальных в разные дни - выполнение условия (б). Общее число занятий в таком случае равно количеству всевозможных подмножеств во множестве из 6 элементов, то есть $2^6 = 64$.
Докажем, что больше 64 занятий посетить не получится. Рассмотрим все $2^7 = 128$ подмножеств множества А из семи школьников, разобьём их на пары {подмножество, дополнение к нему в А}, которых будет 64. Если школьниками посещено больше 64 занятий, то для некоторой пары оба её множества, назовём их В и С, реализовались, как

множества посещений в дни с номерами b и c. Не умаляя общности, можно считать, что b меньше c. В таком случае, ввиду условия (с), хотя бы один школьник из множества B должен был присутствовать и в день c, что невозможно, так как множества B и C не пересекаются.

Критерии оценивания. (●) Приведён пример того, как можно посетить 64 занятия с пояснениями, почему выполнены условия задачи: 2 балла. (●) Если пояснений нет: 1 балл. (●) Доказательство того, что больше 64 занятий посетить не получится: 5 баллов.

Замечание. Факт о том, что число различных подмножеств множества из n элементов равно 2^n, считаем известным и не требующим доказательства.