11 класс

Все задачи оцениваются из 7 баллов. Каждое верное решение, вне зависимости от длины и степени красивости, оценивается в 7 баллов

11.1. Какое максимальное количество простых чисел можно записать, использовав каждую из десяти цифр от 0 до 9 ровно по одному разу?

Ответ. Шесть.

Решение. Докажем, что количество простых чисел, записанных всеми цифрами от 0 до 9, не превосходит 6. Сначала заметим, что одно из простых чисел должно содержать в записи 0, который не может быть в нём первой или последней цифрой, поэтому должно быть не менее, чем трёхзначным. Кроме того, однозначных простых чисел не может быть больше четырёх из списка: 2,3,5,7. Обозначим их число за $x \leq 4$. Остальных – не однозначных и не содержащих в записи 0 - простых чисел будет не больше $\frac{7-x}{2}$, а общее количество всех записанных не больше $1 + x + \frac{7-x}{2} = \frac{9+x}{2} \leq \frac{13}{2}$, то есть не больше 6. При этом количество 6 достигается при $x = 3$ или 4.

Путём некоторого перебора можно показать, что всеми возможными примерами шести простых чисел, записанных всеми цифрами от 0 до 9, являются следующие 5 множеств: {2,3,5,7,461,809}, {2,3,5,7,641,809}, {2,3,5,41,67,809}, {2,3,5,47,61,809}, {2,5,7,43,61,809}. Участнику олимпиады достаточно указать любое из них. Доказательства простоты всех чисел из примеров в решении приводить (записывать явно) не нужно.

Критерии проверки. (●) Доказано, что количество простых чисел не превосходит 6: 4 балла. (●) Любой правильный пример шести простых чисел: 3 балла. (●) Замечено, что одно из простых чисел не менее, чем трёхзначно: 1 балл. Баллы за пункты 1 и 3 не суммируются. (●) Если в качестве примера выписаны 6 простых чисел, не использующих 0, либо 7 чисел, одно из которых не простое, а всё остальное доказано правильно: снимаем 2 балла.

11.2. Найти все множества X, состоящие из различных натуральных чисел от 1 до 50 такие, что: 1) X содержит не все числа от 1 до 50, но не меньше трёх из них, 2) X содержит числа 1 и 50, 3) для любых трёх чисел $x < y < z$ из X число $x - y + z$ также принадлежит X.

Ответ. $X = \{1,8,15,22,29,36,43,50\}$ – арифметическая прогрессия длины восемь с первым членом 1 и разностью 7.

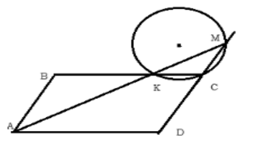
Решение. Обозначим числа множества X за $1 = x_1 < x_2 < \cdots < x_n = 50$. Для любой тройки последовательных чисел $x_{i-1} < x_i < x_{i+1}$, $2 \leq i \leq n-1$ получим $x_{i-1} < x_{i-1} - x_i + x_{i+1} < x_{i+1}$, поэтому $x_{i-1} - x_i + x_{i+1} = x_i$, то есть $x_i - x_{i-1} = x_{i+1} - x_i, 2 \leq i \leq n-1$. Следовательно, множество X является арифметической прогрессией с первым членом 1 и последним членом 50, обозначим её разность за d. Тогда разность $50 - 1 = 49 = x_n - x_1 = d(n-1)$ делится на d, поэтому d может равняться 1,7 или 49. В первом случае X содержит все числа от 1 до 50, в третьем – в X всего 2 числа. По условию, нам подходит только второй случай d=7.

Критерии проверки. (●) Доказано, что X является арифметической прогрессией: 4 балла. (●) Доказано, что разность прогрессии может равняться 1,7 или 49: 1 балл. (●) Доказано, что разность прогрессии равна 7: 2 балла. (●) В тексте заявлено, что, если X содержит два числа, отличающихся на 1, то X содержит все числа от 1 до 50 (даже просто на примере): 1 балл. (●) Замечено, что, если X содержит a, то содержит все 50-к(a-1): 1 балл. Если на основе этого происходит исключение большого числа a, для которых X совпадает со всеми 1,..,50, но не всех: ещё 1-2 балла. (●) Сформулирована идея о там, что X - арифметическая прогрессия: 1 балл. Если отсюда получен верный ответ: ещё 1 балл.

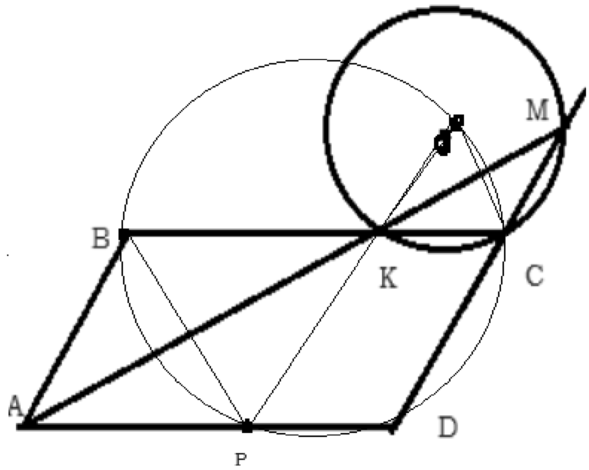
11.3. Пусть длины сторон треугольника являются натуральными числами a, b, c, и одна из его высот равна сумме двух других. Доказать, что число $a^2 + b^2 + c^2$ является точным квадратом (натурального числа).

Доказательство. Запишем выражение для площади треугольника тремя способами: $S = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}$, откуда $h_a = \frac{2S}{a}, h_b = \frac{2S}{b}, h_c = \frac{2S}{c}$. Если $h_a + h_b = h_c$, то $\frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leftrightarrow ab = bc + ac \leftrightarrow ab - bc - ac = 0$. Следовательно, $(a + b - c)^2 = c^2 + a^2 + b^2 + 2(ab - bc - ac) = c^2 + a^2 + b^2$ является точным квадратом, что и требовалось доказать.
Критерии проверки. (●) Получено равенство $ab - bc - ac = 0$: 3 балла.

11.4. Биссектриса угла A параллелограмма ABCD пересекает сторону BC и продолжение стороны DC за точку C в точках K и M соответственно (как показано на рисунке). Доказать, что центр описанной окружности треугольника KCM лежит на описанной окружности треугольника BCD.



Доказательство 1. Обозначим за P точку пересечения описанной окружности (BCD) треугольника BCD и стороны AD, за O – центр описанной окружности треугольника KCM. Параллельные хорды BC и PD высекают на (BCD) равные хорды BP и CD=AB, поэтому равны и BP и AB. Из равенства углов BAK, KAD и BKA следует, что биссектриса AK угла BAD отсекает от параллелограмма равнобедренный треугольник ABK, поэтому AB=BK. Ввиду равенства отрезков BP=AB=BK треугольник PBK равнобедренный с вершиной B, угол при которой, в силу равнобедренности вписанной трапеции BPDC равен углу BCD, то есть равен углу BAD.



Следовательно, величины углов при вершинах P и K равны 90 минус половина угла BAD. С другой стороны, вписанный в окружность (KMC) угол KMC равен половине угла BAD, поэтому центральный угол KOC этой окружности равен углу BAD. Тогда в равнобедренном треугольнике KOC угол OKC при вершине K равен 90 минус половина угла BAD, то есть равен углу BKP, следовательно, углы OKC и BKP вертикальны и точки P, K и O лежат на одной прямой. Ввиду равенства углов PBC=PBK и POC=KOC углу BAD, центр O описанной окружности треугольника KCM лежит на описанной окружности треугольника PBC, совпадающей по построению с описанной окружностью треугольника BCD, что и требовалось доказать.
Доказательство 2. Докажем равенство треугольников BKO и DCO. Как в первом решении, замечаем, что биссектриса AK угла BAD отсекает от параллелограмма равнобедренный треугольник ABK, поэтому DC=AB=BK. Отрезки KO и CO равны, как радиусы описанной окружности треугольника KCM. Наконец, легко убедиться, что углы BKO и DCO равны 90 плюс половина угла BAD. Следовательно, треугольники BKO и DCO равны по паре сторон BK= DC, KO=CO и углу между ними. Тогда в них равны соответствующие углы OBK=OBC и ODC, откуда следует вписанность четырёхугольника OBCD. Последнее означает, что точка O лежит на описанной окружности треугольника BCD, что и требовалось доказать.
Критерии проверки. (●) Отмечена точка P: 1 балл. (●) Замечено равенство BP и AB: 1 балл. (●) Доказано равенство AB=BK: 1 балл. (●) Найден угол BKP: 1 балл. (●) Замечена вертикальность углов OKC и BKP и расположение точек P, K и O на одной прямой: 1 балл. (●) Ввиду равенства углов PBC=PBK и POC=KOC углу BAD, центр O описанной окружности треугольника KCM лежит на описанной окружности треугольника PBC: 2 балла. (●) Замечено, что описанная окружность треугольника PBC, совпадает с описанной окружностью треугольника BCD.
(●) Во втором решении доказано равенство треугольников BKO и DCO: 5 баллов.

11.5. У вредного Васи есть клетчатая полоска длины 13 клеток и лента длины N≥ 13 клеток, каждая шириной в одну клетку. Вася хочет разрезать полоску на кусочки произвольной

длины из нескольких целых клеток по своему усмотрению, а затем уложить часть из них на ленту в некотором порядке так, чтобы в какой-то момент осталось не менее одного кусочка, ни один из которых уложить уже нельзя. При этом кусочки укладываются строго по клеткам и не могут выходить за пределы ленты, ни одна клетка не должна быть накрыта ими дважды и, если на ленте есть место, куда можно уложить очередной кусочек, Вася должен уложить его в одно из таких мест по своему выбору. При каком минимальном N, как бы Вася ни старался, ему не удастся задуманное, то есть придётся уложить все кусочки?
Ответ. $N = 49$.
Решение. Предположим, что Васе удалось задуманное и он так разрезал полоску длины N на кусочки и придумал порядок их укладки на ленту такой, что в некоторый момент ни один из оставшихся к этому моменту кусочков нельзя уложить на ленту. Докажем, что N не больше 48. Обозначим общую длину уже уложенных кусочков за x, тогда общая длина оставшихся равна $13 - x$. Оценим N через x. Уже уложенные кусочки разбивают ленту максимум на $x + 1$ пустых отрезков, длина каждого из которых не превышает $12 - x$, иначе, если есть пустые отрезки большей длины, то один из оставшихся кусочков Васе придётся уложить в один из таких отрезков, что противоречит предположению. Тогда $N \leq (x + 1)(12 - x) + x = -x^2 + 12x + 12$. Максимум этого выражения достигается при $x = 6$, поэтому наибольшее N, при котором Васе может удаться его затея, не превосходит 48.
Докажем, что для всех N$\leq$ 48 Вася действительно может осуществить задуманное. Васе нужно разрезать полоску на шесть кусочков длины 1 клетка и один - длины 7 клеток, после чего укладывать кусочки длины 1 последовательно на клетки номер 7, 14, 21, 28, 35, 42, считая от левого края ленты. Если длина ленты не превосходит 48 клеток, то укладываемые кусочки длины 1 разобьют всю ленту на свободные отрезки длины не более 6 клеток каждый, куда нельзя уложить оставшийся кусок длины 7 поэтому его уложить уже не удастся. Следовательно, ответом задачи будет именно $N = 49$.
Замечание. Можно сказать, что, если для некоторого N≤ 48 при любом разбиении полоски на кусочки Васе всегда придётся уложить все кусочки на ленту длины $N < 48$, то тем более ему придётся уложить все кусочки и на ленту большей длины 48, поэтому достаточно построить пример для $N = 48$. Однако, это кажущееся очевидным утверждение тоже нужно обосновать.
Например, так. Рассмотрим произвольное разбиение полоски длины 13 на кусочки, которое нельзя в некотором порядке уложить на ленту длины 48, но, по предположению, все эти кусочки в том же порядке можно уложить на ленту длины L< 48. Воспроизведём схему «не укладки» этих кусочков для большой ленты на маленькой. Для этого кусочки будем укладывать в том же порядке на те же клетки маленькой ленты, куда клали на большой. Если при этом часть очередного кусочка или весь он уже не поместятся на маленькой ленте (выйдут за правую границу), отрежем их и переместим в конец очереди укладки. Важно, что свободные от кусочков интервалы на маленькой ленте при этом будут такими же, что в исходной схеме «не укладки» на большой. Когда мы доберёмся до кусочка, который нельзя было уложить на большую ленту, может оказаться, что на маленькую ленту можно уложить один из вновь образовавшихся кусочков, и так далее. Такие укладки только уменьшают длины свободных интервалов. Поэтому, кусочек, который нельзя было уложить на большую ленту, нельзя будет уложить и на маленькую. Значит, мы построили схему «не укладки» полученных кусочков на маленькую ленту, что противоречит сделанному предположению.
Другое доказательство оценки N≤ 49. Предположим, что Васе удалось задуманное, и он так разрезал полоску длины N на кусочки и придумал порядок их укладки на ленту такой, что в некоторый момент ни один из оставшихся к этому моменту кусочков нельзя уложить на ленту. Оптимизируем это разрезание. Пусть первый кусочек, который удалось не уложить на ленту, содержал *k* клеток. Разрежем все уже уложенные кусочки на единичные клетки и сдвинем их вправо так, чтобы они оказались на клетках ленты, номера которых, слева направо, делятся на *k*. После этого кусочки-клетки разбивают ленту на отрезки длины

k-1, считая самый левый, а правый может быть и меньше. Всё, что с ленты при этом свалилось, и то, что ещё не было уложено, объединим в один большой кусок новой длины $k_1 \geq k,$ который, очевидно, уложить нельзя. Если $k_1 > k,$ повторим эту процедуру с заменой k на k_1. Так будем делать до тех пор, пока на очередном шаге k_{i+1} не совпадёт с k_i. Таким образом мы показали, что, если есть некоторая схема «не укладки» полоски длины 13 на ленту длины L, то есть и схема «не укладки» полоски длины 13 на ленту длины L, в которой все кусочки, кроме последнего, имеют длину 1, а последний - длину k, и кусочки-клетки укладываются так, что разбивают ленту на свободные отрезки длины k-1, кроме самого правого, длина которого не превосходит k-1. Длина ленты в таком случае не превосходит $(14-k)(k-1)+13-k=-k^2+14k-1 \leq 48$.

Критерии проверки. (●) Доказано, что при всех N, больших 48, Васе придётся уложить все кусочки на ленту: 4 балла. (●) Показано, что при всех $N \leq 48$ Вася может достичь своей цели, то есть «не укладки»: 3 балла. (●) Попытки заявить и доказать неверный ответ, кроме вызванных чисто арифметическими ошибками: как правило 0 баллов.

Основные причины снижения баллов. (●) Если пример, когда Васе удастся задуманное, строится явно только для $N = 48$ и не рассматриваются случаи полос меньшей длины, либо заявляется, что, если для $N = 48$ это удастся, то и для меньших N тоже: снимаем 1 балл. (●) Если при доказательстве того, что при всех N, больших 48, Васе придётся уложить все кусочки на ленту, используются без точного обоснования соображения типа «наилучшая схема – это нарезать полоску на несколько кусочков по одной клетке и один большой кусок вот такой длины и укладывать их определённым образом», за это: минус 2 балла. (●) Если рассматриваются все возможные «оптимальные» схемы укладки нарезок указанного выше типа, дающие ленты только определённых длин: тоже минус 2 балла. (●) Если примеры, доказывающие, что всех при $N \leq 48$ Вася может достичь своей цели, вообще явно не заявляются, а могут быть извлечены из доказательства другой части (что при всех N, больших 48, Васе придётся уложить все кусочки на ленту): общая оценка за задачу не больше 4 баллов. (●) Возможны некоторые другие логические и прочие ошибки, встречающиеся в единственных работах, они там отмечены и оценены.