Всесибирская открытая олимпиада школьников 2023-2024 г.г. по математике
Заключительный этап
8 класс
Решения

8.1. Отец и сын измеряют прямоугольный участок земли. Для этого они идут вдоль его границ и считают число шагов. Когда сын шёл по длинной стороне, а отец по короткой, они суммарно насчитали 130 шагов. Когда отец шёл по длинной стороне, а сын по короткой, они суммарно насчитали 120 шагов. Длина шага отца равна 75 см, а сына — 50 см. Найдите стороны участка.

Ответ. 45 на 30 метров.

Решение. Обозначим стороны прямоугольника за a и b. Получим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{a}{75}+\frac{b}{50}=120, \\ \frac{a}{50}+\frac{b}{75}=130. \end{cases} \iff \begin{cases} 2a+3b=120\cdot 150, \\ 3a+2b=130\cdot 150. \end{cases} \iff \begin{cases} 6a+9b=360\cdot 150, \\ 6a+4b=260\cdot 150. \end{cases}$$

Вычитая, получим $5b=100\cdot 150$, то есть $b=3000$. Подставляя в любое уравнение, имеем $a=4500$. Значит, стороны прямоугольника равны 4500 см и 3000 см.

Критерии. Только ответ — 1 балл (не суммируется с остальными).

Только ответ с проверкой — 2 балла (не суммируются с остальными).

Верно составлена система уравнений, дальнейших продвижений нет или система решена неверно — 4 балла.

8.2. У Антона дома обитают кот веса 1 кг, кот веса 2 кг, $\ldots$, кот веса 100 кг — всего 100 животных. Барон Мюнхгаузен утверждает, что он может рассадить всех этих котов по 10 комнатам таким образом, что будут выполняться следующие условия:

- Во всех комнатах есть хотя бы один кот;
- Во всех комнатах находится разное число котов;
- Если в комнате A котов больше чем в комнате B, то суммарный вес котов в комнате A меньше суммарного веса котов в комнате B.

Могут ли слова барона оказаться правдой?

Ответ. Нет, не могут.

Решение. Хорошо известно, что барон всегда врёт. Докажем, что и в этот раз он сообщил неправду. Предположим, такое распределение котов возможно. Тогда пусть в комнатах находятся $a_1>a_2>\ldots>a_{10}$ котов общим весом $b_1<b_2<\ldots<b_{10}$ соответственно.

Заметим, что если $a_{10}\geqslant 6$, то всего котов хотя бы $6+7+8\ldots+15=105>100$, то есть больше нужного. Значит, в последней комнате находится не более 5 котов.

С другой стороны, в последней комнате, так как она самая «тяжёлая», суммарный вес котов должен составлять хотя бы $1/10$ от общего веса всех 100 котов, то есть $\frac{1}{10}(1+2+\ldots+100)=505$. Но мы уже выяснили, что в последней комнате не более 5 котов, и их суммарный вес никак не может превышать 500. Противоречие.

Критерии. Только ответ — 0 баллов.

Доказано только, что в комнате с наименьшим числом котов их не более 5 — 3 балла.

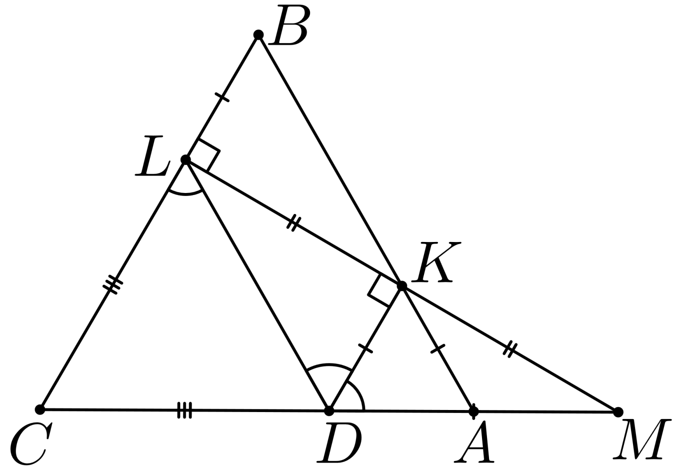
Доказано только, что в комнате с наибольшим суммарным весом по крайней мере 6 котов (или что их суммарный вес больше 500) — 3 балла.

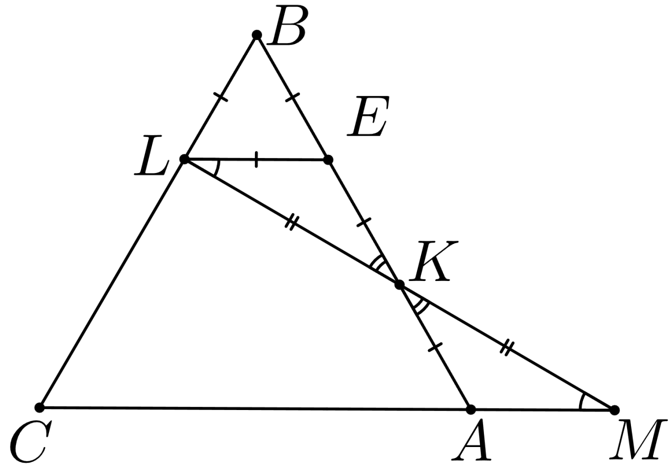
8.3. Дан равносторонний треугольник ABC. Прямая l пересекает в точках K, L и M соответственно отрезки AB, BC и продолжение стороны AC за точку A. Оказалось, что $AK = BL$, а точка K является серединой отрезка LM. Найдите угол BLM.

Ответ. 90°.

Решение 1. Отметим на стороне AC точку D таким образом, что $AD = AK$, тогда $CL = CD$. Каждый из треугольников ADK и CLD является равнобедренным с углом 60°, поэтому они оба —равносторонние. Тогда $\angle KDL = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$.

Тогда в треугольнике LDM отрезок DK является биссектрисой и медианой. Поэтому треугольник LDM — равнобедренный, а DK — его высота. Кроме того, так как $BC \parallel DK$, то $KL \perp BC$, откуда следует, что $\angle BLM = 90^\circ$.





Решение 2. Через точку L проведём прямую, параллельную стороне AC, которая пересечёт сторону AB в точке E. Углы треугольника BLE равны по 60°, поэтому он равносторонний. Значит, $BE = EL = BL = AK$.

Кроме того, из параллельности LE и AM следует, что $\angle ELK = \angle AMK$, откуда треугольники LEK и MAK равны по стороне и двум углам. Следовательно, равны соответствующие стороны $AK = EK = BE = LE$. Но тогда в треугольнике BLK медиана LE равна половине стороны BK, то есть BLK прямоугольный, и $\angle BLM = 90^\circ$.

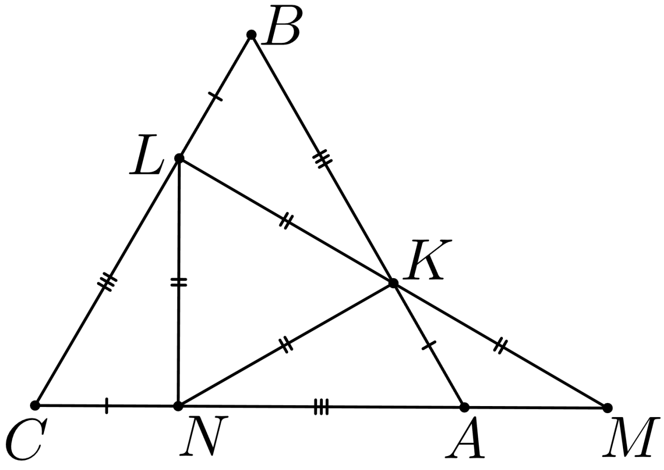
Решение 3. Отметим на стороне AC точку N так, что $CN = AK = BL$. Тогда $CL = AN = BK$. Следовательно, треугольники CLN, ANK и BLK равны по двум сторонам и углу между ними. Значит, $LN = NK = KL$, то есть треугольник KLN равносторонний.

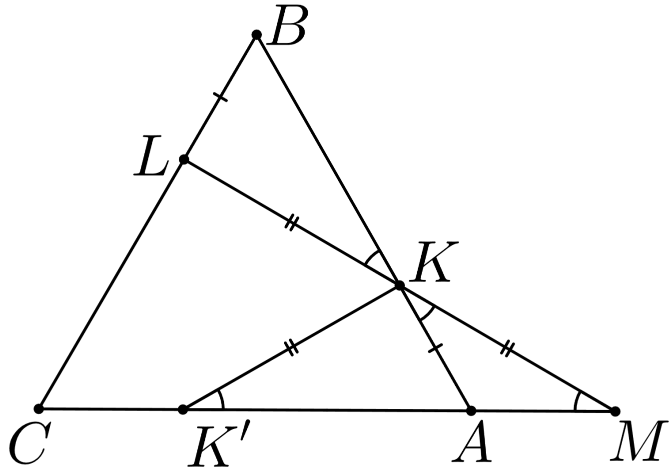
Заметим теперь, что в треугольнике LNM медиана NK равна половине стороны LM, то есть $\angle LNM = 90^\circ$. Следовательно, $\angle BLM = \angle LNC = 90^\circ$.

Решение 4. Возьмём треугольник BLK и приставим его стороной BL к стороне AK треугольнику KAM. В силу того, что $\angle LBK + \angle KAM = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ$, треугольник BLK перейдёт в треугольник AKK', где точка K' лежит на прямой AC. Тогда $KK' = LK = KM$, и треугольник $KK'M$ является равнобедренным.

Осталось заметить, что $\angle AKM = \angle LKB = \angle KK'A = \angle K'MK$, то есть равнобедренным является и треугольник AKM. Но в нём $\angle KAM = 120^\circ$, откуда угол AKM равен 30°. Итого,

$$\angle BLM = 180^\circ - \angle LBK - \angle BKL = 180^\circ - 60^\circ - 30^\circ = 90^\circ.$$





Критерии. Только ответ — 0 баллов.

Построена точка D, E, N или K' — 2 балла (не суммируется между собой).

8.4. Профессор Фортран загадал n целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и отдал их в вычислительное бюро. Там эти числа случайным образом перемешали между собой, получив набор $b_1, b_2, \ldots, b_n$, а затем вычислили произведение

$$(a_1 - b_1) \cdot (a_2 - b_2) \cdot \ldots \cdot (a_n - b_n),$$

которое отдали обратно. Профессор Фортран заметил, что число, полученное им из бюро, оказалось нечётным. Найдите все n, при которых это возможно, и докажите, что других нет.

Ответ. При всех чётных n.

Решение. Для произвольного чётного n приведём пример, как мог получиться нечётный результат. Пусть Фортран загадал числа $1, 2, \ldots, 2k$, а бюро поменяло местами 1 и 2, 3 и 4, $\ldots$, $2k-1$ и $2k$. Тогда каждая скобка $(a_i - b_i)$ является разностью двух соседних чисел, то есть нечётна, как и итоговое произведение.

Теперь докажем, что при нечётных n невозможно получить нечётный результат. Предположим, что возможно. Тогда все скобки $(a_i - b_i)$ нечётны. Рассмотрим их сумму

$$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \ldots + (a_n - b_n) =$$
$$= (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) - (b_1 + b_2 + \ldots + b_n) = 0,$$

так как это одинаковые наборы. Но сумма нечётного количества нечётных чисел не может быть равна 0, так как должна быть нечётна. Противоречие. Итого, подходят все чётные n, и только они.

Критерии. Только ответ — 0 баллов.

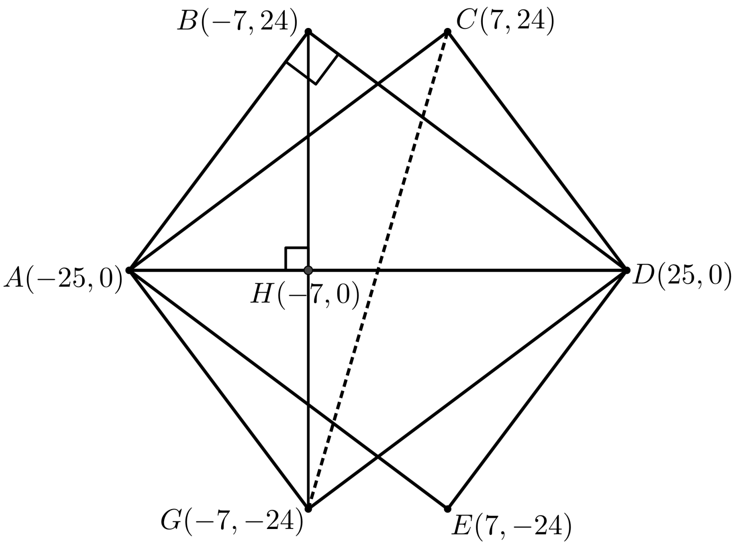
Только пример для чётных n — 3 балла.

Только доказательство невозможности для нечётных n — 4 балла.

8.5. Барон Мюнхгаузен утверждает, что может отметить на плоскости 6 точек таким образом, что никакие три из них не будут лежать на одной прямой, а все попарные расстояния между этими точками будут равны целым числам. Могут ли слова барона оказаться правдой?

Ответ. Да, могли.

Решение. Хорошо известно, что барон никогда не врёт. Докажем, что и в этот раз он сообщил правду. Для этого достаточно привести пример такого расположения точек. Покажем, что подходит, например, следующая конфигурация (в скобках указаны координаты всех 6 искомых точек)

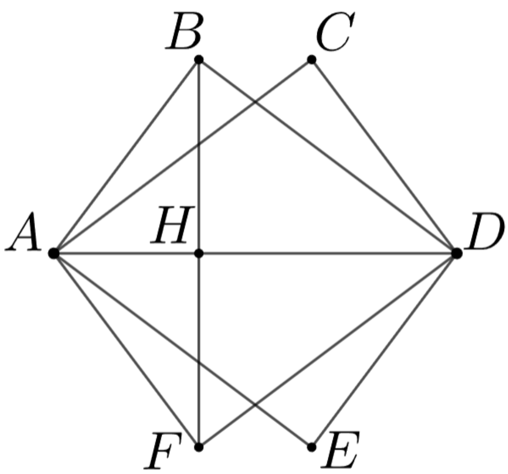


Очевидно, что все расстояния по вертикали и горизонтали являются целыми. Далее, из теоремы Пифагора

$$AG = \sqrt{AH^2 + HB^2} = \sqrt{18^2 + 24^2} = \sqrt{900} = 30,$$
$$GD = \sqrt{CD^2 + BD^2} = \sqrt{32^2 + 24^2} = \sqrt{1600} = 40,$$
$$GC = \sqrt{GE^2 + EC^2} = \sqrt{14^2 + 48^2} = \sqrt{2500} = 50.$$

Все остальные расстояния равны этим трём в силу симметрии.

Замечание. Как можно догадаться до такого примера? Довольно естественно подумать про пифагоровы треугольники, то есть прямоугольные с целочисленными сторонами. Рассмотрим такой треугольник со сторонами 3, 4 и 5. Расположим 3 этих треугольника, получив рисунок ниже.



Уже имеем $AB = AF = CD = DE = 3$, $AC = AE = DB = DF = 4$, $AD = 5$. Кроме того, $BE = CF = AD = 5$, потому что рисунок симметричен относительно середины AD. Значит, единственными потенциально нецелыми расстояниями здесь являются $BF = CE$ и $BC = FE$.

Однако, заметим, что $2S_{ABD} = AB \cdot BD = BH \cdot AD$, откуда $BF = 2BH = \frac{24}{5}$, что является рациональным числом. Из этого следует, что при если увеличить все длины отрезков в 5 раз, то старые целые расстояния останутся целыми, а это станет целым! Наконец, $AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \frac{9}{5}$, откуда $BC = AD - 2AH$ — тоже рациональное число. Поэтому при увеличении в 5 раз и это расстояние станет целыми (и получится пример из решения). На самом деле, можно показать, что все эти рассуждения сработают, какой бы начальный пифагоров треугольник мы ни взяли, поэтому различных примеров вообще бесконечное множество.

Критерии. Только ответ — 0 баллов.

Идея рассмотреть пифагоров треугольник и основание высоты, проведённой к гипотенузе — 2 балла.

Верный пример без обоснования того, что он подходит — не более 6 баллов.

Замечание. Правильный шестиугольник не подходит — его малые диагонали в $\sqrt{3}$ раз больше сторон, то есть не могут быть целыми одновременно.

Правильный пятиугольник с отмеченным центром тоже не подходит — там диагонали в $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ раз больше сторон.