Всесибирская открытая олимпиада школьников 2023-2024 г.г. по математике
Отборочный этап
8 класс
Решения

8.1. В клетки таблицы 3×3 расставлены девять различных натуральных чисел. Оказалось, что в любых двух соседних клетках записаны такие числа, что одно из них делится на другое. Приведите пример, как такое может быть. Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону.

Решение. Достаточно расставить в произвольном порядке числа $2, 4, \ldots, 2^9$. Из них любые два таковы, что одно делится на другое, поэтому условие будет автоматически выполнено.

Критерии. Любой верный пример — 7 баллов.

8.2. У Антона жили 35 котов, и один, масса которого была на 250 грамм меньше средней массы всех котов, вышел погулять. Через некоторое время кот вернулся, но теперь весил уже на 600 грамм больше средней массы всех котов (остальные свой вес не меняли). Сколько грамм наел кот за свою прогулку?

Решение. Пусть кот имел вес x до прогулки и y после, а сумма весов всех остальных котов равна s. Тогда мы ищем $y - x$, и из условия имеем уравнения

$$\begin{cases} x + 250 = \dfrac{x+s}{35}, \\ y - 600 = \dfrac{y+s}{35}. \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое, получаем

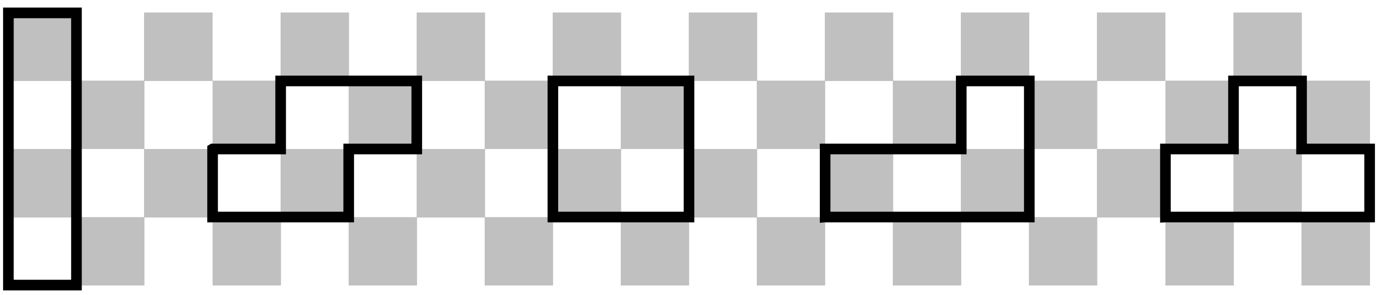
$$y - x - 850 = \frac{y-x}{35} \Rightarrow \frac{34}{35}(y-x) = 850 \Rightarrow y - x = \frac{35 \cdot 850}{34} = 35 \cdot 25 = 875,$$

то есть кот наел 875 грамм.

Критерии. Только ответ — 1 балл.
Только ответ с проверкой, что он подходит — 2 балла (не складывается с предыдущим).
Верно составлена система уравнения, дальнейших продвижений нет — 3 балла (тоже не складывается с предыдущими баллами).

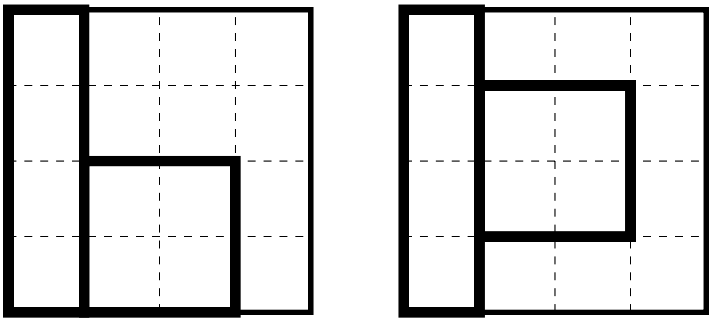
8.3. Дан клетчатый квадрат 4×4. Вася разрезал его по линиям сетки на четыре части одинаковой площади. Могли ли у него получиться 4 различных многоугольника?

Решение. Ясно, что площадь каждой фигуры равна 4 клеткам. Такие фигуры называются *тетрамино*, и несложно проверить, что их существует лишь 5 видов:



Из шахматной раскраски видно доски видно, что последняя фигура единственная содержит разное число чёрных и белых клеток, поэтому использована быть не может (так как и на доске 4×4, и во всех остальных тетрамино поровну обоих цветов). Значит, искомое разрезание содержит в точности первые четыре фигуры.

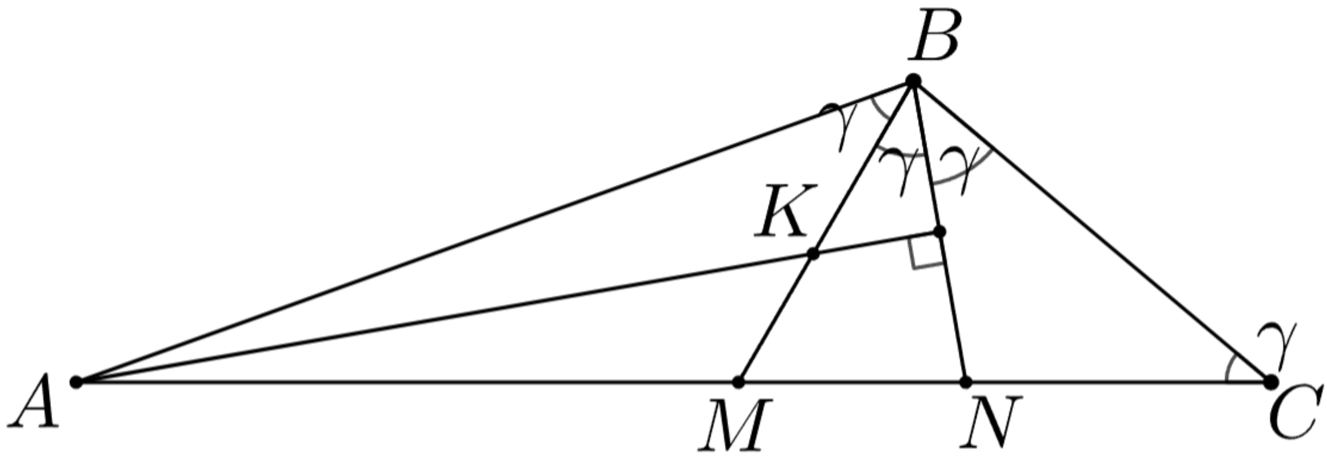
Сразу заметим, что прямоугольник 1×4 может прилегать только к стороне квадрата, а 2×2 в оставшейся части 3×4 может занимать только следующие два положения (остальные случаи симметричны):



В обоих из них остаток нельзя разрезать на две новые тетраминошки, поэтому разрезание из условия задачи невозможно.

Критерии. Только ответ — 0 баллов.
Замечено, что фигур разрезания всего 5 различных — 1 балл.
Доказано, что т-тетрамино не может присутствовать в разрезании — ещё 2 балла.

8.4. В треугольнике ABC угол B в три раза больше угла C. На стороне AC отмечены точки M и N (M лежит между A и N) таким образом, что $\angle ABM = \angle MBN = \angle NBC$. Из точки A на прямую BN опущен перпендикуляр, пересекающий отрезок BM в точке K. Докажите, что прямая NK является биссектрисой угла ANB.



Решение. Обозначим угол C за γ. Тогда $\angle B = 3\gamma$ и $\angle ABM = \angle MBN = \angle NBC = \gamma$. Заметим, что $\angle ANB = 2\gamma$ как внешний к треугольнику BNC. Тогда из равенства $\angle ABN = \angle ANB$ следует равнобедренность треугольника ABN, то есть высота AK является ещё и биссектрисой. Кроме того, в треугольнике ABN прямая BK тоже является биссектрисой. Но все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке. В данном случае это должна быть точка K, поэтому третьей биссектрисой является прямая NK, что и требовалось доказать.

Критерии. Показано равенство 4 углов γ — 1 балл.

Показано, что $\angle ANB = 2\gamma$ — ещё 1 балл.
Показано, что AK является биссектрисой — ещё 1 балл.

8.5. У театрального режиссёра есть несколько сценариев: 22 комедии и 11 трагедий. Каждый сезон он случайным образом раскладывает сценарии по n непустым стопкам (не обязательно поровну), после чего выбирает одну из них, и ставит все спектакли из этой стопки в некотором порядке, который выбирает сам. Режиссёр считает прошедший сезон *удачным*, если ему не пришлось ставить две комедии подряд. На какое наименьшее число стопок n нужно делить режиссёру все свои сценарии, чтобы хотя бы из одной из них можно бы было сделать удачный сезон?

Решение. Пусть в какой-то стопке оказалось x комедий и y трагедий. Чтобы сезон, поставленный по этой стопке, оказался удачным, необходимо и достаточно, чтобы можно было любые две комедии разделить хотя бы одной трагедией, то есть $y \geqslant x - 1$. Соответственно, если стопка неудачная, то $y < x - 1 \iff y \leqslant x - 2$. Если же все стопки неудачные, то, складывая все такие неравенства, получим $11 \leqslant 22 - 2n$, откуда $2n \leqslant 11 \iff n \leqslant 5$. Значит, если $n \geqslant 6$, то все стопки одновременно неудачными быть не могут.

Осталось показать, что $k \leqslant 5$ стопок режиссёру не хватит. Действительно, разделим сценарии следующим образом: $k - 1$ стопка по 2 комедии и одна стопка из 11 трагедий и оставшихся $22 - 2(k - 1) = 24 - 2k \geqslant 14$ комедий. Все стопки окажутся неудачными.

Критерии. Доказательство неравенства $y \leq x - 2$ или эквивалентного ему — 1 балл.
Полное доказательство оценки на 6 стопок — 4 балла.
Полное доказательство того, что $n \leqslant 5$ стопок не хватит — 3 балла (складывается с предыдущим).
Рассмотрен случай только для $n = 5$, но ничего не сказано про $n < 5$ — штраф 1 балл.