Решения заданий заключительного этапа
Всесибирской открытой олимпиады школьников по математике 2023-24 г.г.

9 класс

Все задачи оцениваются из 7 баллов. Каждое верное решение, вне зависимости от длины и степени красивости, оценивается в 7 баллов

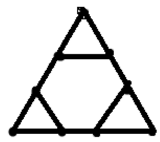
9.1. Пусть x_1, x_2 – корни квадратного многочлена $f(x)$ со старшим коэффициентом 1, а y_1, y_2 – корни квадратного многочлена $g(x)$ со старшим коэффициентом 1. Доказать, что $g(x_1)g(x_2) = f(y_1)f(y_2)$.

Доказательство 1. Ввиду того, что x_1, x_2 – корни квадратного многочлена $f(x)$, можно записать $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)$. Аналогично $g(x) = (x - y_1)(x - y_2)$. Тогда $g(x_1)g(x_2) = (x_1 - y_1)(x_1 - y_2)(x_2 - y_1)(x_2 - y_2) = (y_1 - x_1)(y_1 - x_2)(y_2 - x_1)(y_2 - x_2) = f(y_1)f(y_2)$, что и требовалось доказать.

Доказательство 2. Можно пойти более длинным путём, через теорему Виета. Обозначим $f(x) = x^2 + ax + b, g(x) = x^2 + px + q,$ тогда $x_1 + x_2 = -a, x_1x_2 = b, y_1 + y_2 = -p,\ y_1y_2 = q$. Следовательно, $f(y_1)f(y_2) = (y_1^2 + ay_1 + b)(y_2^2 + ay_2 + b)$, и $g(x_1)g(x_2) = (x_1^2 + px_1 + q)(x_2^2 + px_2 + q)$. Раскрываем первые скобки, получаем $f(y_1)f(y_2) = (y_1y_2)^2 + ay_1y_2(y_1+y_2) + ab(y_1 + y_2) + b(y_1^2 + y_2^2) + a^2y_1y_2 + b^2 = q^2 - aqp - abp + b(p^2 - 2q) + a^2q + b^2$. Раскрываем вторые скобки, получаем $g(x_1)g(x_2) = (x_1^2 + px_1 + q)(x_2^2 + px_2 + q) = (x_1x_2)^2 + px_1x_2(x_1+x_2) + pq(x_1 + x_2) + q(x_1^2 + x_2^2) + p^2x_1x_2 + q^2 = b^2 - pba - pqa + q(a^2 - 2b) + p^2b + q^2$. Легко убедиться, что оба полученных выражения равны. Им можно придать более эстетичный вид $(b - q)^2 - ap(b + q) + qa^2 + bp^2$, симметричный относительно замены $a \leftrightarrow p, b \leftrightarrow q$, при которой многочлен $f(x)$ переходит в многочлен $g(x)$ и наоборот.

Критерии проверки. (●) Запись многочленов в виде $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)$: 1 балл. (●) Запись правильных формул Виета: 1 балл.

9.2. Девять точек соединены 12 отрезками, как показано на рисунке. Каждая точка окрашивается в один из двух цветов. Какое максимальное количество отрезков с концами разного цвета может получиться?



Ответ. 9.

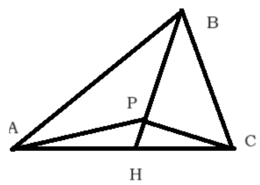
Решение. Если убрать средние отрезки сторон большого треугольника, получатся три маленьких треугольника. По принципу Дирихле, при любой окраске трёх вершин треугольника в два цвета найдутся две одноцветных вершины, поэтому среди его сторон не больше двух с концами разного цвета. Всего в трёх треугольниках будет не больше шести таких сторон, а во всей фигуре не больше 6+3=9 отрезков с концами разного цвета.

Замечание. Утверждение второго предложения может быть доказано прямым перебором.

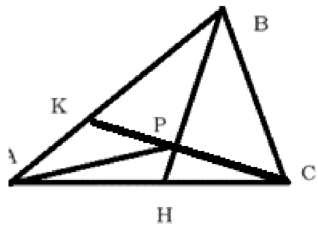
Пример окраски вершин, когда получается 12 отрезков с концами разного цвета: во внутреннем шестиугольнике красим вершины в два цвета по очереди через одну, остальные три вершины произвольно. Тогда разноцветными будут все стороны шестиугольника и ещё по одному отрезку в каждом маленьком треугольнике.

Критерии проверки. (●) Доказано, что число отрезков с концами разного цвета не превосходит 9: 5 баллов. (●) Отсутствие явного доказательства того, что в каждом маленьком треугольнике будет не больше двух сторон с концами разного цвета: минус 2 балла. (●) Пример окраски точек с 9 отрезками: 2 балла.

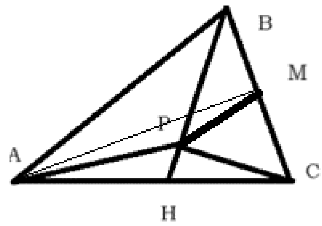
9.3. В остроугольном треугольнике ABC обозначим за P основание перпендикуляра, опущенного из вершины C на биссектрису BH угла ABC. Доказать, что площадь треугольника ABP равна половине площади треугольника ABC.



Доказательство 1. Обозначим точку пересечения прямой CP со стороной AB за K. В треугольнике CBK отрезок BP является биссектрисой и высотой, поэтому он равнобедренный с равными сторонами BC и BK, а точка P – середина стороны CK. Следовательно, площадь треугольника BPK равна половине площади CBK, а площадь треугольника APK равна половине площади треугольника ACK. А вместе площадь треугольника ABP, равная сумме площадей APK и BPK, равна половине суммы площадей ACK и BCK, равной площади треугольника ABC, что и требовалось доказать.



Доказательство 2. Проведём через точку P прямую параллельно стороне AB, пересекающую сторону BC в точке M. Углы BPM и ABP равны, как накрест лежащие, и равны половине угла ABC. Следовательно, равны углы PBM и MPB в треугольнике BMP, поэтому он является равнобедренным и его вершина M лежит на серединном перпендикуляре к BP. По теореме Фалеса M – середина стороны BC треугольника ABC. Площади треугольников APB и AMB, имеющих общую сторону AB и равные высоты к ней из вершин P и M соответственно, равны, поэтому площадь ABP равна площади ABM, равной половине площади ABC, что и требовалось доказать.



Доказательство 3. Обозначим величину угла ABC за 2β, тогда площадь ABC равна 0,5•AB•BC•sin2β = AB•BC•sinβ•cosβ = AB•BC•cosβ •sinβ = AB•BP•sinβ = 2•0,5•AB•BP•sinβ, то есть удвоенной площади треугольника ABP, что и требовалось доказать.

Критерии проверки. В первом доказательстве (●) Равнобедренность треугольника CBK: 2 балла. (●) Равенство площади треугольника BPK половине площади CBK: 1 балл. (●) Равенство площади треугольника APK половине площади ACK: 2 балла. (●) Равенство площади ABP и площади ABM, равной половине площади ABC: 2 балла.

Во втором доказательстве (●) Равнобедренность треугольника BMP: 2 балла. (●) M – середина стороны BC: 2 балла. (●) Равенство площадей треугольников APB и AMB: 2 балла. (●) Равенство площади ABP и половины площади ABC, равной площади AMB: 1 балл.

9.4. Пусть $A = \underbrace{88\ldots88}_{100}$ – натуральное число, записанное 100 восьмёрками, и $B = \underbrace{55\ldots55}_{100}$ - натуральное число, записанное 100 пятёрками. Найти сумму цифр числа $N = 9\cdot A\cdot B$.

Ответ. 900.

Решение. Запишем $N = 9\cdot A\cdot B = 9\cdot 2\cdot \underbrace{44..44}_{100}\cdot 5\cdot \underbrace{11..11}_{100}$=10$\cdot \underbrace{44..44}_{100}\underbrace{99..99}_{100}$=

=10$\cdot \underbrace{44..44\,\cdot}_{100}(10^{100}-1) = 10\cdot(\underbrace{44..44}_{100}\underbrace{00..00}_{100} - \underbrace{44..44}_{100}) = 10\cdot \underbrace{44..43}_{100}\underbrace{55..56}_{100}$.

Сумма цифр полученного числа равна, очевидно, 900.

Критерии проверки. (●) Запись исходного произведения в виде N =10$\cdot \underbrace{44..44}_{100}\underbrace{99..99}_{100}$: 2 балла. (●) Переход 10$\cdot \underbrace{44..44}_{100}\underbrace{99..99}_{100}$=10$\cdot \underbrace{44..44\,\cdot}_{100}$ $(10^{100}-1)$: 1 балл. (●) Переход 10$\cdot$ $\underbrace{44..44\,\cdot}_{100}$ $(10^{100}-1) = 10\cdot(\underbrace{44..44}_{100}\underbrace{00..00}_{100} - \underbrace{44..44}_{100})$: 1 балл. (●) Переход $10\cdot$ $(\underbrace{44..44}_{100}\underbrace{00..00}_{100} - \underbrace{44..44}_{100}) = 10\cdot \underbrace{44..43}_{100}\underbrace{55..56}_{100}$: 2 балла.

9.5. Авиакомпания, в которой служат 13 пилотов, эксплуатирует 9 самолётов попарно различных типов. Каждый день в рейс выходит каждый самолёт, который пилотирует один из 9 назначенных в этот день пилотов. Чтобы пилотировать конкретный самолёт, пилот должен быть специально этому обучен, что стоит 1 миллион рублей. Какова минимальная суммарная стоимость обучения пилотов авиакомпании такого, что при любом выборе 9 пилотов из 13-ти их можно было распределить по всем 9 самолётам так, чтобы каждый мог пилотировать порученный ему самолёт? Пилот не может пилотировать более одного самолёта в день.

Ответ. 45 миллионов рублей.

Решение. Приведём пример такого обучения на сумму 45 миллионов рублей. Занумеруем пилотов числами от 1 до 13, и самолёты числами от 1 до 9. Обучим каждого из первых 9 пилотов пилотированию ровно одного типа самолётов, при этом k - ый пилот учится водить k - ый самолёт для каждого $k = 1, \dots, 9$ («уникальные пилоты»). Каждого из остальных 4 пилотов обучим пилотировать все типы самолётов («универсальные пилоты»), в сумме это будет стоить $9 + 9 \cdot 4 = 45$ миллионов рублей. Универсальных пилотов всего 4, поэтому, если в случайно выбранной девятке $n \geq 5$ уникальные пилотов, то они смогут пилотировать n самолётов, а остальные $9 - n \leq 4$ пилотов будут универсальными, и они смогут пилотировать оставшиеся самолёты.

Докажем, что меньшей суммой компания обойтись не сможет. Действительно, каждый самолёт должны уметь пилотировать не меньше пяти пилотов. Иначе, если некоторый самолёт умеют водить не больше 4 пилотов, можно назначить 9 пилотов, не умеющих водить этот самолёт и в этот день данный самолёт вести будет некому. Значит, в сумме количество обучений на всех 9 самолётах должно составлять не меньше, чем $9 \cdot 5 = 45$ раз, что и даёт те самые 45 миллионов рублей.

Критерии проверки. (●) Доказано, что сумма обучения не меньше, чем 45 миллионов рублей: 3 балла. (●) Приведён пример требуемого в условии обучения за 45 миллионов рублей: 3 балла. (●) Доказана оценка и приведён пример: 7 баллов. (●) Если пример верный, но приведён без обоснования, снимаем 1 балл.