Решения заданий первого этапа 2023-24 гг
Всесибирской открытой олимпиады школьников по математике

9 класс

Все задачи оцениваются из 7 баллов. Каждое верное решение, вне зависимости от длины и степени красивости, оценивается в 7 баллов

9.1. Два пешехода одновременно вышли из пунктов А и Б навстречу друг другу с постоянными скоростями по одной дороге. В какой-то момент они встретились первый раз и продолжили движение. Затем, достигнув противоположного пункта, каждый из них развернулся и двинулся в обратном направлении с той же скоростью, после чего в какой-то момент они встретились во второй раз. Их первая встреча произошла в 720 метрах от ближайшего в этот момент из пунктов А и Б, а вторая - в 400 метрах от другого из этих пунктов. Каково расстояние между А и Б?

Ответ. 1760 метров.

Решение. Обозначим расстояние между пунктами А и Б за S метров и выразим двумя способами отношение скоростей пешеходов. Без ограничения общности можно считать, что первая встреча произошла в 720 метрах от пункта Б. При этом скорость первого пешехода выше скорости второго, а вторая встреча произошла в 400 метрах от А. Тогда отношение скоростей первого и второго пешеходов равно отношению расстояний от места их первой встречи до А и Б, то есть $\frac{S-720}{720}$. С другой стороны, то же отношение равно отношению расстояний плюс S от места второй встречи до А и Б, то есть $\frac{2S-400}{S+400}$. Получаем уравнение $\frac{2S-400}{S+400}=\frac{S-720}{720}$, откуда $S^2-1760S=0$ и $S=1760$.

Критерии оценивания. (●) Верно составлена, но не решена система уравнений для определения S: ставим 3 балла.

9.2. Найти все четвёрки различных простых чисел a,b,c,d таких, что
$a+c=d,\ a(a+b+c+d)=c(d-b),\ 1+bc+d=bd$.

Ответ. $a=2,b=7,c=11,d=13$.

Решение. В первом уравнении число d простое, не меньшее 2+3=5, значит нечётное. Если бы оба простых числа a,c в левой части были отличны от 2, то их сумма, равная d, была бы чётна, что не так. Следовательно, одно из чисел a,c равно 2, а остальные числа b,d нечётны. Если $c=2$, то левая часть третьего уравнения чётна, а правая – нечётна – противоречие, значит, $a=2$ и $d=c+2$. Подставляем последнее равенство в третье уравнение, получаем $1+bc+c+2=bc+2b$, откуда $c=2b-3$ и $d=2b-1$. Теперь подставляем эти равенства во второе уравнение, получаем $2(2+5b-4)=(2b-3)(b-1)$, откуда $2b^2-15b+7=0$ и $b=\frac{15\pm\sqrt{169}}{4}=7,\frac{1}{2}$. Второе решение не целое, поэтому окончательно имеем $b=7,c=11,d=13$.

Критерии оценивания. (●) Замечено, что одно из чисел a,c равно 2: 1 балл. (●) Доказано, что $a=2$: ещё 1 балл. (●) Получены соотношения $c=2b-3$ и $d=2b-1$: по 1 баллу за каждое. (●) Только угадан ответ $a=2,b=7,c=11,d=13$ с проверкой: 1 балл.

9.3. В треугольнике АВС точка М — середина стороны АВ, а Е — точка на стороне ВС такая, что ВЕ:ЕС=2:1. Известно, что углы АМС и ВАЕ равны. Найдите угол ВАС.

Ответ. 90°

Решение. Обозначим за P точку пересечения отрезков AE и CM. Из равенства углов AMC и BAE следует равенство длин отрезков MP и AP. Через точку M проведём прямую параллельно AE, пересекающую сторону BC в точке T. По теореме Фалеса в треугольнике ABE из равенства BM=MA следует равенство BT=TE=EC. Далее, уже в треугольнике CMT по теореме Фалеса из равенства TE=EC следует равенство MP=PC. Значит, PM=PA=PC, и вершина A лежит на окружности с центром P и диаметром MC. Следовательно, угол BAC равен углу MAC, опирающемуся в этой окружности на диаметр MC, и является прямым.
Критерии оценивания. (●) Построение отрезка MT: 1 балл**.** (●) Доказательство равенства BT=TE=EC: ещё 2 балла. (●) Доказательство равенства MP=PC: 2 балла. (●) Доказательство того, что вершина A лежит на окружности с центром P и диаметром MC и угол BAC равен углу MAC: 2 балла.

9.4. Найти все натуральные числа n, для которых число $A_n = 1\underbrace{0...0}_{n}1\underbrace{0...0}_{n}1$ делится на 37.

Ответ. Все n, при делении на 3 дающие остатки 0 и 1.
Решение. Заметим, что $111 = 37 \cdot 3$, то есть 111 делится на 37. Отсюда следует, что при добавлении к любому числу числа 111, умноженного на произвольную степень десятки, остаток от деления этого числа на 37 не изменится. В частности, если к любым трём подряд идущим цифрам числа добавить, либо из них вычесть по 1, то его свойство делимости или не делимости на 37 не изменится.
1) Пусть сначала $n = 3k$. Заполним все разряды числа $A_n = 1\underbrace{0...0}_{n}1\underbrace{0...0}_{n}1$, в которых стоят нули, единицами, проделав операцию прибавления единиц в трёх соседних разрядах $2k$ раз, получив число, записанное подряд $2n+3 = 3(2k+1)$ единицами, которое делится на 111, а значит, и на 37. Следовательно. исходное число A_n также делится на 37.
2) Пусть $n = 3k+1$. Добавим к числу $A_n = 1\underbrace{0...0}_{n}1\underbrace{0...0}_{n}1$ единицы так, чтобы получилось $A'_n = 1\underbrace{1...1}_{n-1}0101\underbrace{1...1}_{n-1}1$, затем уберём единицы в первых и последних $n-1$ разрядах, получив число $A''_n = 10101 = 37 \cdot 273$, делящееся на 37. Следовательно. исходное число A_n также делится на 37.
3) Пусть $n = 3k+2$. Допишем к числу $A_n = 1\underbrace{0...0}_{n}1\underbrace{0...0}_{n}1$ единицы так, чтобы получилось $A'_n = 1\underbrace{1...1}_{n-1}001001\underbrace{1...1}_{n-1}1$, затем уберём единицы в первых и последних $n-1$ разрядах, получив число $A''_n = 1001001 = 37 \cdot 27054 + 3$, не делящееся на 37. Следовательно. исходное число A_n также не делится на 37.
Критерии оценивания. (●).Доказана делимость на 3 числа A_n при $n = 3k$ или $n = 3k+1$: по 2 балла за каждый случай. (●).Доказана не делимость на 3 числа A_n при $n = 3k+2$: 3 балла.

9.5. Обозначим за X множество из n^2 точек координатной плоскости с координатами (x, y), где x и y пробегают все натуральные числа от 1 до n включительно. Найдите наименьшее натуральное число m такое, что среди любых m точек множества X всегда найдутся четыре, являющихся вершинами параллелограмма. Стороны параллелограмма могут быть наклонными - не горизонтальными и не вертикальными..
Ответ. $m = 2n$.
Решение. Пример $m = 2n-1$ точек, никакие четыре из которых не являются вершинами параллелограмма, дают все отмеченные точки, одна или обе координаты которых равна 1.

Если $m < 2n-1$, то достаточно взять любые m из этих $2n-1$ точек. Следовательно, искомое в условии число m не меньше, чем $2n$.
Докажем, что, если $m \geq 2n$, то среди любых m точек из X всегда найдутся четыре, являющихся вершинами параллелограмма, две противоположных стороны которого вертикальны. Назовём эти m точек *отмеченными*, рассмотрим все вертикали множества X, содержащие ненулевое количество отмеченных точек. Занумеруем их числами $1,2,...,s$, и обозначим количество отмеченных в них точек за $a_1, a_2, ..., a_s$ соответственно. На k- ой вертикали можно указать $a_k - 1$ отрезков различной длины с концами в точках из X – это все отрезки с нижним концом, совпадающим с самой нижней отмеченной точкой на этой вертикали. Всего на всех s вертикалях можно таким образом указать $a_1 - 1 + a_2 - 1 + .., + a_s - 1 = m - s \geq m - n$ отрезков, каждый из которых имеет одну из возможных длин $1,2,...,n-1$. Если $m \geq 2n$, то $m - n \geq n$ и некоторые из указанных вертикальных отрезков имеют одинаковую длину. По построению, эти отрезки не могут лежать на одной вертикали, следовательно, их концы являются вершинами не вырожденного параллелограмма с вершинами в отмеченных точках.
Критерии оценивания. (●) Пример $m = 2n-1$ точек, никакие четыре из которых не являются вершинами параллелограмма: 2 балла. (●) Если без обоснования приводится пример, в котором не очевидно отсутствие параллелограмма: снимаем 1 балл. .(●) Уточнение, как отсюда следует, что минимальное $m \geq 2n$, то есть что, если $m < 2n-1$, то достаточно взять любые m из $2n-1$ точек построенного примера: 1 балл (●) Доказано, что для каждого $m \geq 2n$ среди любых m точек из X всегда найдутся четыре, являющихся вершинами параллелограмма: 4 балла.