Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2023-2024 гг

Первый этап **10 класс**

Время написания работы 4 астрономических часа *Каждая задача оценивается в 7 баллов*

10.1. Найти геометрическое место всех точек (x, y) координатной плоскости, для которых при любом значении параметра t из интервала $[-1, 1]$ выполнено неравенство $t^2 + xt + y \geq 0$.

10.2. Найти все пары целых чисел x, y удовлетворяющих уравнению $(x+y)^2 - 2(xy)^2 = 1$.

10.3. Пусть ABC — остроугольный треугольник такой, что BC<AC<AB, а O — центр его описанной окружности. Прямые BA и BC вторично пересекаются с описанной окружностью треугольника AOC в точках K и M соответственно. Докажите, что прямые BO и KM перпендикулярны.

10.4. Круг разделен на $n \geq 3$ секторов, в каждом из которых записано 0 или 1. За один ход можно выбрать любой сектор C, в котором записан 0, изменить цифру в нём на 1 и одновременно изменить символы x и y в двух секторах, соседних с C, на их дополнения *1-x* и *1-y* соответственно. Процесс повторяется в некотором порядке до тех пор, пока хотя бы в одном секторе круга записан 0. В первоначальной конфигурации 0 записан в одном секторе и 1 - во всех остальных. Может ли этот процесс завершиться для а) $n = 31$? б) $n = 30$?

10.5. Семь ленивых школьников решили посещать математический кружок в соответствиями с выработанными ими правилами приличия: (а) На каждом занятии должен присутствовать хотя бы один человек. (б) Для любых двух занятий множества присутствовавших на этих занятиях школьников должны различаться. (в) Для каждого $n \geq 2$ и всех $k = 1, 2, ..., n-1$ среди тех, кто присутствует в день с номером n, обязательно должен быть хотя бы один школьник, присутствовавший в день с номером k. Какое максимальное число занятий они смогут посетить, не нарушая этих правил?

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2023-2024 гг

Первый этап **10 класс**

Время написания работы 4 астрономических часа *Каждая задача оценивается в 7 баллов*

10.1. Найти геометрическое место всех точек (x, y) координатной плоскости, для которых при любом значении параметра t из интервала $[-1, 1]$ выполнено неравенство $t^2 + xt + y \geq 0$.

10.2. Найти все пары целых чисел x, y удовлетворяющих уравнению $(x+y)^2 - 2(xy)^2 = 1$.

10.3. Пусть ABC — остроугольный треугольник такой, что BC<AC<AB, а O — центр его описанной окружности. Прямые BA и BC вторично пересекаются с описанной окружностью треугольника AOC в точках K и M соответственно. Докажите, что прямые BO и KM перпендикулярны.

10.4. Круг разделен на $n \geq 3$ секторов, в каждом из которых записано 0 или 1. За один ход можно выбрать любой сектор C, в котором записан 0, изменить цифру в нём на 1 и одновременно изменить символы x и y в двух секторах, соседних с C, на их дополнения *1-x* и *1-y* соответственно. Процесс повторяется в некотором порядке до тех пор, пока хотя бы в одном секторе круга записан 0. В первоначальной конфигурации 0 записан в одном секторе и 1 - во всех остальных. Может ли этот процесс завершиться для а) $n = 31$? б) $n = 30$?

10.5. Семь ленивых школьников решили посещать математический кружок в соответствиями с выработанными ими правилами приличия: (а) На каждом занятии должен присутствовать хотя бы один человек. (б) Для любых двух занятий множества присутствовавших на этих занятиях школьников должны различаться. (в) Для каждого $n \geq 2$ и всех $k = 1, 2, ..., n-1$ среди тех, кто присутствует в день с номером n, обязательно должен быть хотя бы один школьник, присутствовавший в день с номером k. Какое максимальное число занятий они смогут посетить, не нарушая этих правил?