

**Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2023-2024 гг**

**Первый этап**

**11 класс**

*Время написания работы 4 астрономических часа*

*Каждая задача оценивается в 7 баллов*

**11.1.** Четыре клетки на клетчатой бумаге называются *квартетом*, если их центры образуют прямоугольник, стороны которого параллельны линиям сетки. Какое максимальное количество квартетов можно разместить в квадрате 5 на 5? Никакие два разных квартета не могут содержать общих клеток.

**11.2.** а) Найти все значения параметра  $a$ , при которых разрешима система уравнений  $x + y^2 + z^2 = a, x^2 + y + z^2 = a, x^2 + y^2 + z = a$ . б) Решить систему при каждом из этих  $a$ .

**11.3.** Окружность с центром  $O$  на стороне  $AD$  параллелограмма  $ABCD$  проходит через его вершины  $A, B$  и  $C$ . Прямые  $AD, CD$  и  $BO$  снова пересекают окружность в точках  $K, M, N$  соответственно. Докажите, что длины отрезков  $NK, NM$  и  $ND$  равны между собой.

**11.4.** Найдите все тройки  $(a, b, c)$  натуральных чисел  $a > b > c$  такие, что числа  $a^2 + 3b, b^2 + 3c, c^2 + 3a$  являются квадратами натуральных чисел.

**11.5.** В бесконечный в две стороны ряд выставлены коробки, в одной из которых лежит единственный камень, а остальные пусты. Ещё есть очень большая куча камней. За один ход можно переложить в кучу камень из любой коробки  $K$ , в которой он есть, и положить из кучи по камню в две коробки, соседние с  $K$ . После некоторого ненулевого конечного числа таких ходов выяснилось, что в нескольких стоящих подряд  $n$  коробках оказалось по  $q$  камней в каждой, а остальные пусты. а) Докажите, что  $q = 1$ . б) Найдите все возможные значения  $n$ .

**Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2023-2024 гг**

**Первый этап**

**11 класс**

*Время написания работы 4 астрономических часа*

*Каждая задача оценивается в 7 баллов*

**11.1.** Четыре клетки на клетчатой бумаге называются *квартетом*, если их центры образуют прямоугольник, стороны которого параллельны линиям сетки. Какое максимальное количество квартетов можно разместить в квадрате 5 на 5? Никакие два разных квартета не могут содержать общих клеток.

**11.2.** а) Найти все значения параметра  $a$ , при которых разрешима система уравнений  $x + y^2 + z^2 = a, x^2 + y + z^2 = a, x^2 + y^2 + z = a$ . б) Решить систему при каждом из этих  $a$ .

**11.3.** Окружность с центром  $O$  на стороне  $AD$  параллелограмма  $ABCD$  проходит через его вершины  $A, B$  и  $C$ . Прямые  $AD, CD$  и  $BO$  снова пересекают окружность в точках  $K, M, N$  соответственно. Докажите, что длины отрезков  $NK, NM$  и  $ND$  равны между собой.

**11.4.** Найдите все тройки  $(a, b, c)$  натуральных чисел  $a > b > c$  такие, что числа  $a^2 + 3b, b^2 + 3c, c^2 + 3a$  являются квадратами натуральных чисел.

**11.5.** В бесконечный в две стороны ряд выставлены коробки, в одной из которых лежит единственный камень, а остальные пусты. Ещё есть очень большая куча камней. За один ход можно переложить в кучу камень из любой коробки  $K$ , в которой он есть, и положить из кучи по камню в две коробки, соседние с  $K$ . После некоторого ненулевого конечного числа таких ходов выяснилось, что в нескольких стоящих подряд  $n$  коробках оказалось по  $q$  камней в каждой, а остальные пусты. а) Докажите, что  $q = 1$ . б) Найдите все возможные значения  $n$ .