

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2024-25 г.г.
Отборочный этап
10 класс
Время написания работы 4 астрономических часа. Решения всех задач оцениваются из 7 баллов

10.1. Расставить в каждой клетке таблицы 3 на 3 по одному натуральному числу от 1 до 9 так, чтобы сумма чисел в любой паре соседних по стороне клеток была составным числом. Все девять чисел должны быть использованы.

10.2. Во вписанном в окружность пятиугольнике ABCDE величины углов ABE, BEC и ECD равны 40, 50 и 50 градусов соответственно, а длины стороны AB и диагонали CE равны 5 и 7 см соответственно. Найти длину диаметра окружности.

10.3. Доказать, что для любых неотрицательных чисел a, b выполняется неравенство:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \sqrt{ab} \leq a + b.$$

10.4. Найти все натуральные числа n , для которых число $n \cdot 2^{n-1} + 1$ является квадратом натурального числа.

10.5. Пусть k – произвольное натуральное число из интервала от 1 до 20 включительно. Два игрока, Вася и Петя играют на доске размера 20 на 20 в игру, выполняя по очереди следующие ходы. Сначала все клетки доски белые. Первым ходит Вася. За один свой ход Вася либо красит любую белую клетку в красный цвет, либо передаёт ход Пете. За один свой ход Петя либо красит в синий цвет любой квадрат доски размера k на k , состоящий целиком из белых клеток, либо передаёт ход Васе. Игра заканчивается, когда каждый из игроков одновременно отказывается от своего хода, в том числе, из-за невозможности его сделать. Если в итоге на доске окажется больше красных клеток, победит Вася, если больше синих – Петя, если поровну – ничья. Определите исход игры при каждом $k = 1, 2, \dots, 20$.