

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2024-25 г.г.
Отборочный этап
9 класс
Время написания работы 4 астрономических часа. Решения всех задач оцениваются из 7 баллов

9.1. Разрезать прямоугольник размера 10 на 1 на несколько частей, из которых можно сложить квадрат площади 10. Разрезы должны проходить по отрезкам прямых.

9.2. В некоторой группе из не менее, чем трёх человек, произошёл обмен письмами такой, что для каждого двух человек А и В либо А послал письмо В, либо В послал письмо А, но не одновременно и то и другое. Кроме того, для любых трёх человек А, В и С выполняется условие: если А послал письмо В, а В послал письмо С, то и С послал письмо А. Сколько человек может быть в этой группе? Найти все ответы и доказать, что других нет.

9.3. На стороне АС остроугольного треугольника АВС, у которого сторона АС длиннее стороны АВ. взята точка Р такая, что $AB=PC$, К - середина отрезка АР, М - середина стороны ВС. Доказать, что прямая КМ параллельна биссектрисе угла ВАС.

9.4. Найти все пары простых чисел p и q , для которых обе суммы $p + q$ и $p + 4q$ являются квадратами натуральных чисел.

9.5. В каждой клетке доски 7 на 7 записано некоторое действительное число, по модулю не превосходящее 1. Известно, что сумма чисел в любых четырёх клетках, образующих квадрат 2 на 2, равна нулю. Доказать, что сумма 49 чисел, записанных во всех клетках доски, не превосходит по модулю 7. Достигается ли эта граница?