

**Решения заданий заключительного этапа Всесибирской открытой
олимпиады школьников по математике 2025-26 гг**

Любое верное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов

10 класс

10.1. На доске 8 на 8 произвольным образом отмечены 12 клеток. Докажите, что всегда можно выбрать некоторые 4 горизонтали и некоторые 4 вертикали, содержащие все отмеченные клетки.

Доказательство. Обозначим за $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_8$ количество отмеченных клеток в 8 вертикалях доски, по условию $a_1 + a_2 + \dots + a_8 = 12$. Если $a_5 \geq 2$, то $a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \geq 8$, а $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \leq 4$. В этом случае можно взять 4 максимальных вертикали, содержащие соответственно a_5, a_6, a_7, a_8 отмеченных клеток и те, не более, чем 4 горизонтали, содержащие остальные $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \leq 4$ отмеченные клетки.

Если $a_5 \leq 1$, то $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq a_5 \leq 1$, поэтому $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \leq 4$ и $a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \geq 12 - 4 = 8$ и снова можно повторить рассуждение предыдущего случая.

Критерии проверки. (●) Только доказано, что 4 максимальных вертикали содержат не меньше 8 отмеченных клеток: 4 балла. (●) Замечено, что для оставшихся ≤ 4 клеток достаточно четырёх горизонталей: 3 балла. Если первый пункт не доказан, то только за второй пункт 3 балла на ставятся.

10.2. Сумма некоторого составного натурального числа и его максимального делителя, отличного от 1 и самого числа, равна p^k для некоторого простого числа p и $k \geq 2$. Найти все возможные значения p .

Ответ. $p = 3$.

Решение. Обозначим за n исходное натуральное число из условия, тогда для его максимального собственного делителя d имеем $n = dq$, где q – минимальный простой делитель числа n . Из условия следует равенство $d(1 + q) = p^k$. Число d делит p^k , поэтому d является некоторой степенью p и делится на p , следовательно, p – простой делитель n . Из минимальности q получаем $p \geq q$. Если $p = q$, то $1 + p$ должно быть степенью p , что невозможно, поэтому $p \geq q + 1$. В таком случае число $1 + q$ может быть степенью p только при $p = q + 1$, поэтому одно из простых чисел p и q чётно, а другое – нечётно. Следовательно, $p = 3$ и $q = 2$. Примером является $n = 6, d = 3$, тогда $n + d = 9 = 3^2 = p^2$.

Критерии проверки. (●) Показано, что p – простой делитель n : 2 балла. (●) Показано, что $p \geq q+1$: 1 балл. (●) Показано, что $p = q+1$: 1 балл. (●) Доказано, что $p = 3$ и $q=2$: 1 балл. (●) Пример $p = 3$ и $q=2$, $n = 6$, $d = 3$: 2 балла. (●) -1 балл за включение $p=2$ в ответ из-за арифметической ошибки при проверке существования x . (●) -3 балла за включение $p=2$ в ответ из-за отсутствия проверки существования x .

10.3. Отрезок разделен 19 точками на 20 частей. Каждый из 20 отрезков разбиения нужно сделать стрелкой так, чтобы стрелок, указывающих налево, было столько же, сколько указывающих направо, и для каждой стрелки количество других стрелок, на которые она указывает, отличалось от аналогичного количества у других стрелок. Например, вот в такой расстановке 6 стрелок $\rightarrow \leftarrow \leftarrow \rightarrow \leftarrow \rightarrow$ они показывают соответственно, на 5, 1, 2, 2, 4, 0 других стрелок. Найти количество всех расстановок 20 стрелок, удовлетворяющих условию.

Ответ. Количество хороших расстановок равно $C_{10}^5 = 252$.

Решение. Будем называть k -ой k -ую слева направо стрелку, $k = 1, 2, \dots, 20$. Произвольная стрелка может указывать на 0, 1, 2, ..., 19 других, всего 20 возможных значений, и все эти числа должны различаться у всех стрелок, поэтому числа, на которые указывают последовательно первая, вторая, ..., двадцатая стрелки – это некоторая перестановка чисел 0, 1, 2, ..., 19. Заметим, что числа 0 и 19 могут стоять только на крайних местах этой перестановки, так как не указывать ни на одну или указывать сразу на все остальные стрелки могут только крайние стрелки. При этом возможны два варианта: первая и 20-ая стрелки обе указывают налево, или наоборот, первая и 20-ая стрелки обе указывают направо. Далее берём числа 1 и 18, они могут стоять в перестановке только на местах 2 и 19, перед крайними с соответствующих концов, причём снова, обе стрелки либо одновременно указывают направо, либо одновременно указывают налево. Продолжая так далее, мы разобьём все стрелки на 10 пар: 1-ая и 20-ая, 2-ая и 19-ая, 3-я и 18-ая, ..., 10-я и 11-я, стрелки в парах согласованно указывают в любую из двух возможных сторон, в k -ой паре одна стрелка указывает на $k - 1$ стрелок, а вторая – на $20 - k$ стрелок, $k = 1, 2, \dots, 20$. Кроме того, по условию, налево и направо указывают по 10 стрелок, поэтому ровно в пяти парах стрелки указывают направо, и в пяти – налево. Таким образом, общее число всех расстановок 20 стрелок, удовлетворяющих условию, равно количеству выборов пяти из десяти пар, указывающих направо, то есть $C_{10}^5 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 3 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 6 = 252$.

Критерии проверки. (●) Замечено, что количества стрелок, на которые указывают другие стрелки, это перестановка чисел $0,1,2,\dots,19$: 1 балл. (●) Замечено, что числа 0 и 19 могут стоять только на крайних местах этой перестановки и как ориентированы там стрелки: ещё 1 балл. (●) Указано разбиение на пары: 1 балл. (●) Указана одинаковая ориентация стрелок в парах: 1 балл. (●) Подсчитано число возможных ориентаций всех стрелок при условии того, что налево и направо указывают по 10 стрелок: 3 балла.

10.4. В остроугольном треугольнике ABC обозначим за I центр вписанной в него окружности, а за P - точку пересечения прямой, зеркально симметричной прямой AB относительно биссектрисы CI и прямой, зеркально симметричной прямой BC относительно биссектрисы AI . Докажите, что прямая PI перпендикулярна стороне AC .

Доказательство. 1. Обозначим за a, b, c длины сторон BC , AC и AB соответственно, а за M - точку касания вписанной окружности треугольника ABC со стороной AC . Хорошо известно, что $AM = \frac{b+c-a}{2}$, $CM = \frac{a+b-c}{2}$.

2. Рассмотрим образ треугольника ABC при зеркальном отражении относительно биссектрисы CI , обозначим за A_1 образ его вершины B . Точка A_1 лежит на прямой AC на расстоянии a от вершины C . После зеркального отражения прямой AB относительно биссектрисы CI её образ проходит через точку A_1 под углом $\angle CA_1P = \angle CBA$ к стороне AC . При этом $CM < CA_1 \Leftrightarrow \frac{a+b-c}{2} < a \Leftrightarrow b < a + c$, поэтому точка M лежит между точками C и A_1 . Следовательно, $MA_1 = CA_1 - CM = \frac{a+c-b}{2}$.

3. Аналогично, после зеркального отражения прямой BC относительно биссектрисы AI её образ проходит через точку C_1 - образ вершины B - на расстоянии c от вершины A под углом $\angle AC_1P = \angle ABC = \angle CBA$ к стороне AC . При этом $AM < AC_1 \Leftrightarrow \frac{b+c-a}{2} < c \Leftrightarrow b < a + c$, поэтому точка M лежит между точками A и C_1 . Следовательно, $MC_1 = AC_1 - AM = \frac{a+c-b}{2} = MA_1$.

4. Таким образом, мы доказали, что $MA_1 = MC_1$, а углы $\angle C_1A_1P = \angle CA_1P = \angle AC_1P = \angle A_1C_1P$, поэтому треугольник A_1PC_1 - равнобедренный с серединой основания M . Тогда прямая PM является медианой и высотой из вершины P и перпендикулярна основанию A_1C_1 . Радиус MI вписанной окружности треугольника ABC тоже проходит через M и перпендикулярен A_1C_1 , поэтому точка M лежит на прямой PI . Следовательно, прямая PI совпадает с перпендикуляром к стороне AC в точке M , что и требовалось доказать.

Критерии проверки. (●) Чёткая и верная формулировка без доказательства того, что $AM = \frac{b+c-a}{2}$, $CM = \frac{a+b-c}{2}$: 1 балл. (●) То же с доказательством: 2 балла. (●) Доказательство того, что точка М лежит между точками С и A_1 , и между точками А и C_1 : 1 балл. (●) Доказательство равнобедренности треугольника A_1PC_1 с серединой основания М: 2 балла. (●) Вывод отсюда того, что прямая PI совпадает с перпендикуляром к стороне АС в точке М: 2 балла.

10.5. Найти все тройки действительных чисел (a, b, c) , удовлетворяющих

$$\text{системе уравнений } \begin{cases} a(b^2 + c) = c(c + ab), \\ b(c^2 + a) = a(a + bc), \\ c(a^2 + b) = b(b + ca). \end{cases}$$

Ответ. $a = b = c$.

Решение. 1. Сначала представим уравнения системы в следующем виде $ab(b - c) = c(c - a)$, $bc(c - a) = a(a - b)$, $ca(a - b) = b(b - c)$.

2. Предположим, что одно из чисел равно 0, можно считать, $a = 0$. Тогда из первого уравнения следует $c^2 = 0 \Leftrightarrow c = 0$, подставим в третье уравнение, получим $b^2 = 0 \Leftrightarrow b = 0$. В итоге получим решение $a = b = c = 0$. Далее считаем все числа a, b, c ненулевыми.

3. Предположим, что два из чисел равны, можно считать, $a = b$. Тогда из второго уравнения $bc(c - a) = 0 \Leftrightarrow c = a$. В итоге получим решение $a = b = c$. Далее считаем все числа a, b, c ненулевыми и различными.

4. Перемножим все уравнения, получим $(abc)^2(b - c)(c - a)(a - b) = abc(c - a)(a - b)(b - c)$, сокращаем на $abc(c - a)(a - b)(b - c) \neq 0$, получаем $abc = 1$. Отсюда следует, что, либо все числа a, b, c положительны, либо среди них одно положительно, а два – отрицательны.

5. Предположим, что среди чисел a, b, c одно положительно, а два – отрицательны, можно считать $a > 0 > b, c$. Тогда в уравнении $b(c^2 + a) = a(a + bc)$ левая часть отрицательна, а правая – положительна – противоречие. Далее считаем все числа a, b, c положительными и различными.

6. Ввиду цикличности системы, нам достаточно рассмотреть два различных случая: $a > b > c > 0$ и $a > c > b > 0$. В первом из них $a(a + bc) = b(c^2 + a) < a(bc + a)$ – противоречие. Во втором случае $b(b + ca) = c(a^2 + b) > b(b + ca)$ – тоже противоречие.

В итоге, получается только одна бесконечная серия решений $a = b = c$.

Критерии проверки. 1. Ответ с проверкой или без: 0 баллов.

2. Доказано, что если в решении одна из неизвестных равна нулю, то и две другие тоже равны нулю: 1 балл.

3. Доказано, что если значения двух неизвестных в решении равны, то значения всех трех неизвестных равны: 1 балл.

4. Получено равенство $(abc)^2(b-c)(c-a)(a-b) = abc(c-a)(a-b)(b-c)$ (возможны ``аналоги" типа $(b-c)(c-a)(a-b) = abc(c-a)(a-b)(b-c)$ или $abc = 1$ даже если в работе участник забыл, что сокращать можно только на ненулевые множители: 1 балл.

5. Доказано, что нет решений, в которых ровно одна из неизвестных больше нуля: 1 балл.

6. Доказано, что нет решений, в которых все три неизвестные положительны и различны, за каждый из случаев $a > b > c > 0$ и $a > c > b > 0$ (или их аналоги): по 1 баллу.

7. Ошибка в преобразованиях, не повлиявшая на ход решения в целом: снимаем -1 балл.

Баллы за все пункты суммируются друг с другом.