

**Решения заданий заключительного этапа Всесибирской открытой
олимпиады школьников по математике 2025-26 гг**

Любое верное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов

11 класс

ПЕРВЫЙ ВАРИАНТ

11.1. Действительные числа x, y, z удовлетворяют уравнениям $x^2 - yz = y^2 - zx = z^2 - xy = 2$. Найти все возможные значения выражения $xy + yz + zx$.

Ответ. -2 .

Решение. Перепишем первое уравнение как $x^2 - yz = y^2 - zx \Leftrightarrow (x - y)(x + y + z) = 0$, и второе, как $y^2 - zx = z^2 - xy \Leftrightarrow (y - z)(x + y + z) = 0$. Если $x + y + z \neq 0$, то $x = y = z$, но в таком случае $x^2 - yz = y^2 - zx = z^2 - xy = 0$, что противоречит условию. Следовательно, $x + y + z = 0$, тогда $z = -x - y$. Подставим это в уравнение $z^2 - xy = 2 \Leftrightarrow x^2 + xy + y^2 = 2$. С другой стороны, $xy + yz + zx = xy + z(x + y) = xy - (x + y)^2 = -(x^2 + xy + y^2) = -2$. Достигается это значение, например, при $x = \sqrt{2}, y = 0, z = -\sqrt{2}$.

Критерии проверки. (●) Угадан верный ответ с соответствующим примером: 1 балл. (●) Доказано, что $x + y + z = 0$: 3 балла. (●) Доказано, что $x^2 + xy + y^2 = 2$: ещё 1 балл. (●) отсюда найдено $xy + yz + zx = -2$: 2 балла. (●) Не приведён пример, когда достигается ответ $xy + yz + zx = -2$: минус 2 балла.

ВТОРОЙ ВАРИАНТ

11.1. Действительные числа x, y, z удовлетворяют уравнениям $x^2 + yz = y^2 + zx = z^2 + xy = 2$. Найти все возможные значения выражения $xy + yz + zx$.

Ответ. 2 и 3.

Решение. Перепишем первое уравнение, как $x^2 + yz = y^2 + zx \Leftrightarrow (x - y)(x + y - z) = 0$, второе, как $y^2 + zx = z^2 + xy \Leftrightarrow (y - z)(-x + y + z) = 0$, и третье, как $x^2 + yz = z^2 + xy \Leftrightarrow (x - z)(x - y + z) = 0$. Если все числа x, y, z различны, то первые скобки в каждом произведении не равны нулю, значит, равны нулю все вторые скобки, то есть $x + y - z = 0, -x + y + z = 0, x - y + z = 0$, складывая эти уравнения попарно, получим $x = y = z = 0$, противоречие.

Пусть $x = y$, тогда из второго и третьего равенств $zx = z^2 \Leftrightarrow z(x - z) = 0$, то есть либо $x = y = z$, либо $z = 0$. Подставляя в исходные уравнения, получим в первом случае, $x = y = z = \pm 1$, во втором $x = y = \pm \sqrt{2}, z = 0$. В первом случае $xy + yz + zx = 3$, во втором $xy + yz + zx = 2$. Аналогично рассматриваются случаи $x = z$ и $x = z$, дающие тот же ответ.

Критерии проверки. (●) Угаданы верные ответы с соответствующими примерами: по 1 баллу за каждый. (●) При решении системы упущено одно из значений $xy + yz + zx$: 4 балла.

11.2. Пусть $a_n, n = 1, 2, \dots$ - бесконечная последовательность положительных действительных чисел таких, что $a_1 = 1$ и $a_{n+1}^2 + a_{n+1} = a_n, n = 1, 2, \dots$. Докажите, что $a_n \geq \frac{1}{n}$ для всех натуральных n .

Доказательство. Индукция по n . База индукции: при $n = 1$ имеем $a_1 = 1 \geq \frac{1}{1}$ - верно.

Шаг индукции. Пусть $a_n \geq \frac{1}{n}$, тогда $a_{n+1}^2 + a_{n+1} - a_n = 0$, отсюда положительный корень $a_{n+1} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4a_n}}{2}$, нужно убедиться в том, что $\frac{-1 + \sqrt{1 + 4a_n}}{2} \geq \frac{1}{n+1}$. Ввиду того, что, по предположению индукции, $a_n \geq \frac{1}{n}$,

требуемое неравенство следует из более сильного $\frac{-1 + \sqrt{1 + \frac{4}{n}}}{2} \geq \frac{1}{n+1}$. Последнее равносильно неравенству $\frac{n+4}{n} \geq \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^2 \Leftrightarrow (n+4)(n+1)^2 \geq n(n+3)^2 \Leftrightarrow n^3 + 6n^2 + 9n + 4 \geq n^3 + 6n^2 + 9n$, которое, очевидно, верно.

Критерии проверки. (●) Замечено, что достаточно доказать более сильное

неравенство $\frac{-1 + \sqrt{1 + \frac{4}{n}}}{2} \geq \frac{1}{n+1}$: 3 балла. (●) Если отсутствует замечание о том,

что неравенство $\frac{-1 + \sqrt{1 + \frac{4}{n}}}{2} \geq \frac{1}{n+1}$ более сильное, чем $\frac{-1 + \sqrt{1 + 4a_n}}{2} \geq \frac{1}{n+1}$: снимем 3

балла. (●) При доказательстве от обратного и отсутствии базы $n = 1$: минус 1

балл. (●) Получено промежуточное утверждение с верным обоснованием - 3

балла. (●) Доказательство утверждения, которое нужно доказать, без указания равносильности, засчитывалось как логическая ошибка.

11.3. Докажите, что любой неравобедренный треугольник можно разбить на три треугольника, радиусы описанных окружностей которых равны.

Доказательство. Рассмотрим произвольный треугольник ABC.

1. Пусть сначала ABC – остроугольный, обозначим за H точку пересечения его высот, в этом случае H лежит внутри треугольника. Хорошо известно, что угол, скажем, AHC равен $180^\circ - \angle ABC$, поэтому точка, симметричная H относительно стороны AC, лежит на описанной окружности (ABC) треугольника ABC. Отсюда следует, что окружность, симметричная (ABC) относительно AC, является описанной окружностью треугольника AHC (Достаточно широко известный факт, за его недоказательство в решении снимаем всего 1 балл). Аналогично рассуждая для сторон AB и BC, получим, что описанные окружности треугольников AHB, BHC и AHC получаются из (ABC) симметрией относительно сторон AB, BC и AC соответственно и имеют одинаковые радиусы описанных окружностей, равные радиусу описанной

окружности треугольника ABC, что даёт требуемое в условии разбиение в случае остроугольного ABC.

Заметим, что в случае остроугольного треугольника его не равнобедренность неважна. Она существенна только для прямо- и тупоугольного треугольников.

2. Пусть ABC – тупоугольный не равнобедренный, считаем тупым угол В и, без ограничения общности, что угол С больше угла А. Восстановим серединный перпендикуляр к стороне АВ, пусть Р - точка его пересечения со стороной АС, треугольник АРВ – равнобедренный.

Рассмотрим описанную окружность треугольника РВС, угол между её касательной в точке В и хордой РВ равен углу С и больше угла АРВ, равного А. Кроме того, угол А острый и поэтому меньше тупого угла 180-С, поэтому вершина А лежит вне описанной окружности треугольника РВС. Следовательно, эта окружность пересекает сторону АВ в некоторой внутренней точке К, отличной от А и В. Четырёхугольник РКВС вписанный, поэтому описанная окружность треугольника РВС является и описанной окружностью треугольника РВК. Осталось заметить, что в силу равнобедренности треугольника АРВ радиусы описанных окружностей треугольников АРК и РВК равны: $\frac{AP}{2 \sin \angle AKP} = \frac{BP}{2 \sin \angle BKP} = \frac{AP}{2 \sin(180 - \angle AKP)}$. Таким образом, треугольники ВРС, АРК и РВК образуют требуемое в условии разбиение для тупоугольного треугольника ABC.

Есть ещё один подходящий вариант расположения точки К на стороне АВ – когда угол ВКР равен углу С, а не 180-С, как в рассмотренной выше конструкции, тогда радиусы описанных окружностей треугольников РВС и РВК равны: $\frac{BP}{2 \sin \angle ACB} = \frac{BP}{2 \sin \angle BKP} = \frac{AP}{2 \sin \angle ACB}$.

Рассуждение пункта 2 проходит и в остроугольном неравнобедренном треугольнике, если считать величины углов в порядке по возрастанию А, В, С, поэтому конструкция пункта 2 является универсальной для любого не равнобедренного треугольника.

3. Есть ещё один способ искомого разбиения. Снова считаем, что величины углов в порядке идут по возрастанию А, В, С. Отметим на стороне АВ точку Р такую, что АР=АС, треугольник АРС – равнобедренный. На отрезке РС отметим точку К такую, что АК=В. Тогда радиусы описанных окружностей треугольников АКС, АВК и ВСК равны: $\frac{AK}{2 \sin \angle AKC} = \frac{AK}{2 \sin \angle APK} = \frac{BC}{2 \sin(180 - \angle APK)}$.

Критерии проверки. (●) Решение содержит только случай остроугольного треугольника ABC в духе пункта 1: 3 балла. (●) Полное решение в духе конструкции пункта 2: 7 баллов, (●) если отсутствует точное объяснение того, что точка К лежит на стороне АВ: минус 2 балла. (●) нет обоснования

равенства радиусов описанных окружностей треугольников РВС и РВК: минус 1 балл. (●) нет обоснования равенства радиусов описанных окружностей треугольников АРК и РВК: минус 2 балла.

11.4. Множество X состоит из десяти различных натуральных чисел таких, что для произвольного $k = 2, \dots, 10$ сумма любых k из этих чисел делится на k . Найти минимальное значение, которое может принимать максимальное из этих чисел.

Ответ. 22681.

Решение. Обозначим числа множества X за $x_1 < x_2 < \dots < x_{10}$. Докажем, что в условиях задачи разность любых двух соседних чисел делится на все натуральные числа от 1 до 9. Рассмотрим произвольные соседние числа $x_i, x_{i+1}, i = 1, 2, \dots, 9$ и натуральное число k из интервала от 2 до 9, докажем, что разность $x_{i+1} - x_i$ делится на k . Рассмотрим два k – элементных подмножества A и B множества X , различающихся ровно одним элементом, первое из них содержит x_i , но не содержит x_{i+1} , а второе содержит x_{i+1} , но не содержит x_i . Для этого можно взять в качестве A любые $k - 1 \leq 8$ из всех 8 чисел множества, кроме x_i, x_{i+1} , и x_i , а в качестве B – те же $k - 1$ чисел и x_{i+1} .

Разность сумм чисел в B и A как раз равна $x_{i+1} - x_i$ и делится на k .

Делимость на каждое из чисел 2, 3, ..., 9 равносильно делимости на их наименьшее общее кратное, равное $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$. Для дальнейшего отметим, что полученное число делится и на 10. Следовательно, каждая разность $x_{i+1} - x_i$ делится на 2520, поэтому не меньше 2520 для всех $i = 1, 2, \dots, 9$. Значит, $x_{10} = x_1 + x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + \dots + x_{i+10} - x_9 \geq 1 + 9 \cdot 2520 = 22681$. Соответствующий пример множества X выглядит так – это арифметическая прогрессия $x_i = 1 + 2520 \cdot (i - 1), i = 1, 2, \dots, 10$. Сумма любых $k = 1, 2, \dots, 10$ из этих чисел равна k плюс число, делящееся на 2520, поэтому делится на k .

Критерии проверки. (●) Приведён правильный пример множества X с верным ответом и обоснованием его верности: 3 балла. (●) Пример приведён без обоснования: 2 балла. (●) Доказана оценка $x_{10} \geq 1 + 9 \cdot 2520 = 22681$: 4 балла.

11.5. В таблице размера 8 на 8 клеток отмечены некоторые 8 клеток так, что в каждой строке и каждом столбце отмечена ровно одна клетка. Кроме того, в некоторых 8 клетках таблицы расставлены 8 фишек так, что в каждой строке и каждом столбце стоит ровно одна фишка. За один ход можно переставить одну из фишек в любую соседнюю с ней по стороне пустую клетку. Найти

минимальное N такое, что при любых допустимых расстановке 8 фишек и отметке 8 клеток в таблице можно все фишки переставить на отмеченные клетки не более, чем за N ходов. Некоторые фишки могут изначально стоять в отмеченных клетках.

Ответ. $N=32$.

Решение. Покажем, что N не меньше 32. **Пример 1.** Занумеруем клетки таблицы как в шахматах, вертикали – слева направо латинскими буквами от a до h , горизонтали – снизу вверх цифрами от 1 до 8. Отметим все клетки главной диагонали таблицы из нижнего левого угла в правый верхний: $a1, b2, \dots, h8$, а фишки расставим на клетках побочной диагонали таблицы из левого верхнего угла в правый нижний: $a8, b7, \dots, g2, h1$. Несложно убедиться в том, что для того, чтобы попасть на главную диагональ, фишкам с полей $a8$ и $h1$ потребуется не менее 7 ходов, фишкам с полей $b7$ и $g2$ – не менее 5 ходов, фишкам с полей $c6$ и $f3$ – не менее 3 ходов, фишкам с полей $d5$ и $e4$ – не менее 1 хода. Итого, чтобы передвинуть все фишки на отмеченные поля в данной конфигурации потребуется не менее $7+7+5+5+3+3+1+1=32$ хода. Подсчёт сделан даже без учёта возможных помех со стороны других фишек при движении. **Пример 2.** Отметим все клетки главной диагонали таблицы из нижнего левого угла в правый верхний: $a1, b2, \dots, h8$, а фишки расставим на клетках $a5, b6, c7, d8, e1, f2, g3, h4$. В этом случае для того, чтобы попасть на главную диагональ, каждой фишке нужно сделать не менее 4 ходов, а всем вместе 32 хода. Все приведённые участниками примеры были только как в примерах 1 и 2.

Теперь докажем, что 32 ходов всегда хватит, причём достаточно просто переставить каждую фишку в отмеченную клетку, расположенную с ней в одном столбце. Фишки, уже стоящие в отмеченных клетках, мы не трогаем, и они не влияют на оценку потому, что в столбцах и строках, их содержащих, нет других фишек и отмеченных клеток. Каждую из остальных фишек переставим последовательными ходами в отмеченную клетку того столбца, в котором она стоит. **Способ 1.** Заметим, что при этом линию сетки, разделяющую первую и вторую горизонтали, могли пересечь не более двух фишек – уходящая с первой строки и приходящая на неё. Аналогично, линию сетки, разделяющую вторую и третью строки, могли пересечь не более четырёх фишек – уходящие с первой и второй строк и приходящие на первую и вторую строки. Продолжая так далее, получим, что следующие горизонтальные линии сетки могли соответственно пересечь не более 6, 8, 6, 4, 2 фишек. Каждое пересечение горизонтальных линий сетки – это ход некоторой фишки, и каждый ход в нашем алгоритме – это пересечение горизонтальных линий сетки, поэтому всего при любом начальном расположении фишек и клеток будет сделано не более $2+4+6+8+6+4+2=32$ ходов, и все фишки окажутся на отмеченных клетках.

Способ 2. Обозначим за a_i и b_i номер фишки и номер отмеченной клетки в i -ом столбце, $i = 1, 2, \dots, 8$ соответственно. Тогда количество ходов только по вертикали, требующихся для постановки фишек на отмеченные клетки, не превосходит максимума суммы $|a_1 - b_1| + \dots + |a_8 - b_8|$. Среди чисел a_i и b_i , $i = 1, 2, \dots, 8$ по одному разу встречаются все числа от 1 до 8. При раскрытии модулей получатся 8 из этих чисел со знаком плюс и восемь из этих чисел со знаком минус. Сумма восьми чисел со знаком плюс не превосходит суммы восьми максимальных чисел из множества $1, 1, \dots, 7, 7, 8, 8$, то есть $8+8+7+7+6+6+5+5=52$, а сумма восьми чисел со знаком минус не меньше суммы восьми минимальных чисел из множества $1, 1, \dots, 7, 7, 8, 8$, то есть $1+1+2+2+3+3+4+4=20$. Следовательно, количество ходов только по вертикали, требующихся для постановки фишек на отмеченные клетки, не превосходит разность этих сумм, не превосходящую $52-20=32$.

Заметим, что для многих расположений клеток и фишек минимальное число ходов достигается только при использовании и горизонтальных и вертикальных ходов, правда, оно при этом меньше 32.

Ответ. $N=32$.

Критерии проверки. (●) Приведение примера того, что N не меньше 32, с полным обоснованием: 3 балла. (●) Верный пример с ответом, но без обоснования: 1 балл. (●) Верный пример с ответом, в обосновании которого есть недостатки: скажем, прямо стрелками на рисунке или текстом указано, что рассматриваются только вертикальные, или только горизонтальные ходы. В примере этого делать нельзя, это ограничивает общность рассмотрения: минус 1 балл.

(●) Доказательство того, что 32 ходов достаточно: 4 балла. (●) Только явная и чёткая формулировка верного алгоритма для достижения не более, чем 32 ходов (ходим только по горизонтали или только по вертикали), но без обоснования: 1 балл. (●) **Очень распространённая логическая ошибка** (не менее 100 работ) - написано примерно следующее: только 2 фишки могут сделать ход длины 7, исключаем две содержащие их строки (столбцы), из оставшихся только две фишки могут сделать ход длины 5, исключаем их строки и т.д., тогда всего фишки смогут сделать не более $2(7 + 5 + 3 + 1) = 32$ хода и оценка «доказана». Это попытка реализации «жадного алгоритма», когда на каждом шагу выбирается оптимальное именно для этого шага решение, а оценка сложности работы «жадного алгоритма» считается оценкой сложности ВСЕЙ задачи. Но хорошо известно, что этот алгоритм не всегда оптимален. **Основная проблема** в том, что, если нет двух строк, где расстояния от фишек до клеток равны 7, то утверждение о том, что из оставшихся только две фишки могут сделать ход длины 5, уже неверно. В примере 2 к данной задаче, когда отмеченные клетки идут по главной диагонали, а 4 фишки стоят выше неё на 2 клетки и 4 фишки ниже неё на 2 клетки, каждая фишка делает по 4 хода, и работает не жадный алгоритм. А почему тогда нет чего-то ещё более оптимального? ПОЭТОМУ попытка ТАКОГО и РОДСТВЕННЫХ ему доказательств, что 32 ходов достаточно, никак не оценивается. Большая просьба - честно осознать, что ваш подход основан на этой схеме (если это так) и подобные попытки не пытаться апеллировать.