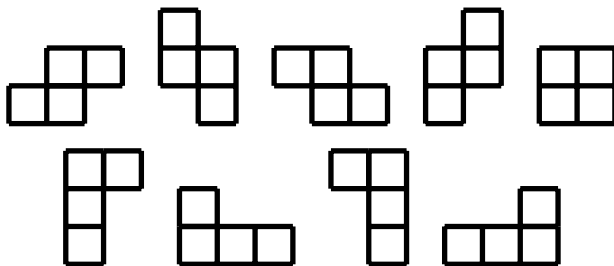


**Всесибирская открытая олимпиада школьников
2025-2026 г.г. по математике
Отборочный этап. 7 класс**

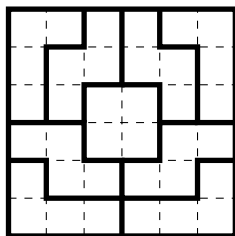
Решения

Все задачи оцениваются из 7 баллов. Каждое верное решение, вне зависимости от длины и степени красоты, оценивается в 7 баллов

- 7.1. Разрежьте клетчатый квадрат 6×6 на части, изображённые ниже, используя каждую ровно один раз. Поворачивать и переворачивать фигуры **нельзя**. Достаточно привести один пример.



Решение. Например, можно разрезать следующим образом



Критерии. Любое верное разрезание — 7 баллов.

Разрезание, в котором верный набор частей, но они повернуты и/или перевёрнуты — 3 балла.

- 7.2. Принц Артас решил инвестировать в криптовалюту. Для этого он отдаёт Криптлорду 60 золотых, после чего количество оставшихся денег у принца удваивается. После трёх таких инвестиций у Артаса золота стало в 2 раза меньше, чем было изначально. Сможет ли он инвестировать в четвёртый раз?

Решение. Пусть у Артаса изначально было x золотых. Тогда после первой инвестиции у него их становится $2(x - 60) = 2x - 120$, после второй — $2(2x - 180) = 4x - 360$, после третьей — $2(4x - 420) = 8x - 840$. По условию $x = 2(8x - 840)$, откуда $15x = 1680$, то есть $x = 112$. Следовательно, после трёх инвестиций у Артаса осталось $8 \cdot 112 - 840 = 56$ золотых, и на четвёртую денег у него уже не осталось.

Критерии. Только ответ — 0 баллов.

Показано только, что $x = 112$ подходит — 2 балла.

- 7.3. У Антона дома живут коты общей массой 120 килограммов, причём каждый отдельный кот весит либо ровно 3 килограмма, либо ровно 4 килограмма. Докажите, что

можно распределить всех этих котов на две группы равной массы.

Решение. Предположим, что у Антона меньше 20 3-килограммовых котов и меньше 15 4-килограммовых. Тогда суммарная масса всех его котов строго меньше $20 \cdot 3 + 15 \cdot 4 = 120$, что противоречит условию. Значит, либо у него есть 20 3-килограммовых котов (и тогда они образуют требуемую группу в 60 кг), либо есть 15 4-килограммовых (что аналогично решает задачу).

Критерии. Показано только, что это выполняется в частном случае — 0 баллов.

Неполный перебор всех возможных количеств котов — не более 3 баллов.

- 7.4. За круглый стол переговоров сели гномы и эльфы: суммарно 1001 участник, причём все разного возраста. Известно, что эльфы всегда лгут, а гномы всегда говорят правду. Каждому из участников переговоров был задан вопрос «У тебя есть сосед-эльф младше тебя?», на который все ответили «Да». После этого переговорщики пошли на перерыв, а вернувшись, сели за за стол в случайном порядке. На этот раз каждому из участников был задан вопрос «У тебя есть сосед-гном младше тебя?». Докажите, что хотя бы двое ответили «Да».

Решение. Рассмотрим самого молодого участника. На первый вопрос он соврал, откуда является эльфом. Тогда он соврёт и во второй раз, сказав «Да».

Посмотрим теперь на начальную рассадку. В ней не могло находиться двух эльфов подряд, так как старший из них в таком случае сказал бы правду. Следовательно, по кругу идут группы гномов, соседние из которых разделены ровно одним эльфом. Заметим, что хотя бы в одной группе хотя бы два гнома (на самом деле, ровно два, так как они говорят правду), ведь иначе гномов и эльфов было бы поровну, то есть чётное количество суммарно. Из этого следует, что гномов за столом больше, чем эльфов.

Теперь рассмотрим конечную рассадку. Если бы в ней все гномы сидели по одному, то из аналогичных рассуждений следовало бы, что эльфов больше, чем гномов, что не так. Значит, найдётся два гнома, сидящих рядом. Старший из них ответит «Да» на второй вопрос, а значит, утверждение доказано.

Критерии. Доказано, что прозвучит хотя бы один ответ «Да» — 1 балл.

- 7.5. На проводе в ряд сидят 2025 воробьёв, каждый из которых смотрит либо вправо, либо влево. Воробьи, которые смотрят вправо, видят всех других птиц, сидящих правее. Аналогично, воробьи, которые смотрят влево, видят всех других птиц, сидящих левее. Докажите, что найдётся воробей, которого суммарно видят столько же птиц, сколько видит он сам.

Решение. Назовём воробьёв, которые смотрят вправо, *правыми*, а остальных *левыми*. В силу того, что правых и левых суммарно нечётное количество, в какой-то из этих двух групп тоже. Без ограничения общности, пускай правых воробьёв нечётное число $2k + 1$ для некоторого целого $k \geq 0$.

Рассмотрим среднего воробья из всех правых (то есть и слева, и справа от него по k правых воробьёв). Заметим, что он видит k правых воробьёв, и его видят k правых воробьёв, то есть поровну правых птиц. С другой стороны, если этот воробей видит какую-то левую птицу, то и она видит его, и наоборот. Поэтому если справа от выбранного воробья некоторое количество n левых птиц, то он суммарно видит $k + n$ воробьёв, а его суммарно видят $k + n$ других птиц, то есть он является искомым.