

Решения

Все задачи оцениваются из 7 баллов. Каждое верное решение, вне зависимости от длины и степени красоты, оценивается в 7 баллов

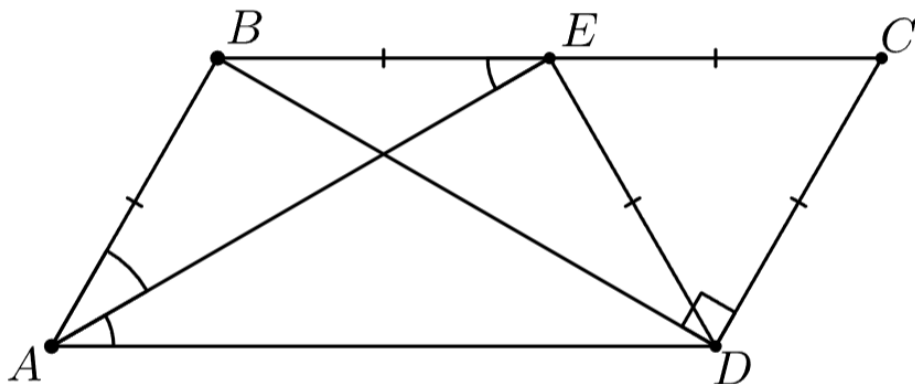
- 8.1. Принц Артас решил инвестировать в криптовалюту. Для этого он отдаёт Крипторлорду 60 золотых, после чего количество оставшихся денег у принца удваивается. После трёх таких инвестиций у Артаса золота стало в 2 раза меньше, чем было изначально. Сможет ли он инвестировать в четвёртый раз?

Решение. Пусть у Артаса изначально было x золотых. Тогда после первой инвестиции у него их становится $2(x - 60) = 2x - 120$, после второй — $2(2x - 180) = 4x - 360$, после третьей — $2(4x - 420) = 8x - 840$. По условию $x = 2(8x - 840)$, откуда $15x = 1680$, то есть $x = 112$. Следовательно, после трёх инвестиций у Артаса осталось $8 \cdot 112 - 840 = 56$ золотых, и на четвёртую денег у него уже не осталось.

Критерии. Только ответ — 0 баллов.

Показано только, что $x = 112$ подходит — 2 балла.

- 8.2. В параллелограмме $ABCD$ точка E является серединой стороны BC . Найдите угол ABC , если оказалось, что AE — биссектриса угла BAD , а угол BDC — прямой.



Решение. Имеем $\angle DAE = \angle EAB = \angle BEA$, где первое равенство верно в силу того, что AE — биссектриса, а второе, — так как $BE \parallel AD$. Следовательно, треугольник ABE равнобедренный, и $AB = BE = EC$.

В прямоугольном треугольнике BDC проведена медиана DE , поэтому он равна половине гипотенузы, то есть $DE = BE = EC$. Наконец, $CD = AB$ как противоположные стороны параллелограмма, и поэтому $CD = DE = EC$, откуда треугольник CED равносторонний, и $\angle ECD = 60^\circ$. Итого, $\angle BAD = \angle BCD = 60^\circ$.

Критерии. Только ответ — 0 баллов.

Доказано, что $AB = BE$ — 2 балла.

Доказано, что $DE = BE = EC$ — 2 балла.

- 8.3. За круглый стол переговоров сели гномы и эльфы: суммарно 1001 участник, причём все разного возраста. Известно, что эльфы всегда лгут, а гномы всегда говорят правду. Каждому из участников переговоров был задан вопрос «У тебя есть сосед-эльф младше тебя?», на который все ответили «Да». После этого переговорщики пошли на перерыв, а вернувшись, сели за стол в случайном порядке. На этот раз каждому из участников был задан вопрос «У тебя есть сосед-гном младше тебя?». Докажите, что хотя бы двое ответили «Да».

Решение. Рассмотрим самого молодого участника. На первый вопрос он соврал, откуда является эльфом. Тогда он соврёт и во второй раз, сказав «Да».

Посмотрим теперь на начальную рассадку. В ней не могло находиться двух эльфов подряд, так как старший из них в таком случае сказал бы правду. Следовательно, по кругу идут группы гномов, соседние из которых разделены ровно одним эльфом. Заметим, что хотя бы в одной группе хотя бы два гнома (на самом деле, ровно два, так как они говорят правду), ведь иначе гномов и эльфов было бы поровну, то есть чётное количество суммарно. Из этого следует, что гномов за столом больше, чем эльфов.

Теперь рассмотрим конечную рассадку. Если бы в ней все гномы сидели по одному, то из аналогичных рассуждений следовало бы, что эльфов больше, чем гномов, что не так. Значит, найдётся два гнома, сидящих рядом. Старший из них ответит «Да» на второй вопрос, а значит, утверждение доказано.

Критерии. Доказано, что прозвучит хотя бы один ответ «Да» — 1 балл.

- 8.4. Пусть a и b — некоторые натуральные числа. На доске написано $(a + b)$ -значное число, в котором сначала идёт a троек, а затем b шестёрок, то есть оно имеет вид

$$\underbrace{33\dots3}_a \underbrace{66\dots6}_b.$$

При каких a и b данное число является квадратом целого числа?

Решение. Обозначим это число через n , и пусть $n = k^2$ для некоторого натурального k . Заметим, что k чётно, и поэтому n должно делиться на 4, откуда на 4 должно делиться число, образованное двумя последними цифрами n . Однако, 66 не делится на 4, и поэтому n может заканчиваться только на одну шестёрку.

Отметим сразу, что $36 = 6^2$, а 336 квадратом не является, так что осталось рассмотреть числа, начинающиеся хотя бы с трёх троек. Вспомним, что k чётно, откуда $k = 2m$, то есть

$$4m^2 = \underbrace{3\dots36}_a \iff m^2 = \underbrace{83\dots34}_{a-2},$$

в чём легко убедиться, поделив $\underbrace{3\dots36}_a$ на 4 в столбик. Но тогда m^2 заканчивается на

34, что невозможно в силу причин, уже описанных выше: m должно быть чётным, но квадрат чётного числа делится на 4, и не может заканчиваться на двузначное число, не делящееся на 4.

Итого, возможен только случай $a = b = 1$.

Критерии. Только ответ, ответ с проверкой — 0 баллов.

Доказано только, что $b = 1$ — 2 балла.

8.5. На научную конференцию приехали учёные из 9 стран: всего 5 математиков и 19 физиков. Каждый математик во время конференции подискутировал по крайней мере с 14 другими учёными, а каждый физик — не более чем с тремя. Докажите, что найдётся такая страна, что её представители вообще не дискутировали друг с другом.

Решение. Рассмотрим произвольного математика. Максимум 4 из его дискуссий были с другими математиками, поэтому минимум 10 были с физиками. Суммарно тогда дискуссий между математиками и физиками было минимум 50.

С другой стороны, физики всего провели не более, чем $19 \cdot 3 = 57$ дискуссий, и поэтому максимум 7 из них состоялись между двумя физиками. Но в этом рассуждении каждая дискуссия между физиками посчитана дважды (со стороны каждого из участников), и поэтому на самом деле дискуссий между двумя физиками было максимум 3.

Рассмотрим теперь все страны, из которых не приехало математиков. Их, очевидно, хотя бы четыре. Максимум в трёх из них могла состояться дискуссия между физиками (так как их всего максимум 3). Значит, из одной из стран приехали только физики, которые между собой не общались, и эта страна удовлетворяет условию (или же из этой страны не приехал вообще никто, что тоже нам подходит).

Критерии. Замечено, что между математиками и физиками было хотя бы 50 дискуссий — 1 балл.

Доказано, что между физиками было проведено максимум 3 дискуссии — ещё 2 балла.