

**Решения заданий заключительного этапа Всесибирской открытой
олимпиады школьников по математике 2025-26 гг**

Любое верное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов

9 класс

9.1. Пусть x, y - действительные числа такие, что $x^2 + x \leq y$. Докажите, что тогда $y^2 + y \geq x$.

Доказательство. Предположим противное, тогда $y^2 + y < x$. Сложим это неравенство с неравенством из условия, получим $x^2 + y^2 + x + y < y + x$, откуда $x^2 + y^2 < 0$ – противоречие.

Критерии проверки. (●) При предположении противного записано нестрогое неравенство $y^2 + y \leq x$, а потом по умолчанию при сложении использовано, как строгое: минус 3 балла.

9.2. В равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями $AD > BC$ точка E – основание перпендикуляра, опущенного из вершины B на основание AD , а M – середина диагонали BD . Докажите, что отрезок EM параллелен диагонали AC .

Доказательство. Отметим на основании AD точку P такую, что $PD = BC$. Отрезки BC и PD равны и параллельны, поэтому четырёхугольник $PBCD$ является параллелограммом, следовательно, точка M – середина его диагонали BD , совпадает с серединой его второй диагонали PC .

Отрезки $CD = AB$ и PB равны, как противоположные стороны параллелограмма $PBCD$, поэтому треугольник ABP равнобедренный, следовательно его высота BE является и его медианой, значит, точка E – середина отрезка AP . Следовательно, отрезок EM – средняя линия треугольника APC , поэтому он параллелен его стороне AC , что и требовалось доказать.

Критерии проверки. (●) Идея построения точки P : 1 балл. (●) Доказано, что M совпадает с серединой PC : 2 балла. (●) Доказано, что E – середина отрезка AP : 2 балла. (●) Доказано, что EM – средняя линия треугольника APC : 2 балла.

9.3. В каждой клетке прямоугольной таблицы записано некоторое натуральное число. При этом для каждой клетки число, стоящее в ней, равно общему количеству различных значений чисел в клетках, находящихся в той же строке или том же столбце (включая саму клетку), что и данная. Найдите все таблицы, обладающие этим свойством.

Ответ. Независимо от размера, это только таблицы, в каждой клетке которых записана единица.

Решение. Рассмотрим максимальное из всех записанных в клетках таблицы чисел, обозначим его за m , и любую клетку A , в которой записано m . По условию, строка и столбец, содержащие A , содержат в совокупности ровно m различных натуральных чисел, не превосходящих m , ввиду его максимальности. Следовательно, в этих строке и столбце в совокупности записаны в точности только числа $1, 2, \dots, m$. Рассмотрим клетку B , содержащую число 1. По условию, все клетки строки и столбца, содержащих B , содержат одно и то же число, равное, следовательно, 1. Клетка A содержащая m , располагается в одной строке, либо одном столбце с клеткой B , содержащей 1, поэтому $m = 1$, и во всех клетках таблицы записаны единицы.

Критерии проверки. (●) Доказано, что в строке и столбце, проходящих через A , записаны в точности только числа $1, 2, \dots, m$: 3 балла. (●) Рассмотрена клетка B с 1 и доказано, что все клетки строки и столбца, содержащих эту клетку, содержат только 1: 2 балла. (●) Доказано, что $m = 1$: 1 балл (●) Доказано, что все остальные клетки таблицы должны содержать 1: 1 балл.

(●) Доказано, что в таблице есть единица, - 3 балла.

(●) Доказано, что, если есть единица, вся таблица заполнена единицами, - 4 балла.

(●) При неправильно понятых условиях доказано, что в таблице есть единица, - 1 балл, ибо рассуждения аналогичные тем, что при правильном понимании условий.

9.4. Найдите все пары простых чисел (p, q) такие, что $p^3 + p = q^2 + q$.

Ответ. $p = 3, q = 5$.

Решение. Перепишем уравнение в виде: $p(p^2 + 1) = q(q + 1)$. Очевидно, что p и q различны, а, значит, взаимно просты, следовательно p делит $q + 1$, откуда $q = k \cdot p - 1$ для некоторого натурального числа k . Подставим это выражение в уравнение, получим квадратное уравнение $p^2 - k^2 p + k + 1 = 0$ относительно p . Из него находим $p = \frac{k^2 \pm \sqrt{k^4 - 4k - 4}}{2}$ – целое число, в таком случае дискриминант уравнения $k^4 - 4k - 4$ должен быть точным квадратом. Ближайший к точному квадрату $k^4 = (k^2)^2$ меньший точный квадрат равен $k^4 - 2k^2 + 1 = (k^2 - 1)^2$ поэтому должно выполняться неравенство $2k^2 - 1 \leq 4k + 4$, то есть $2k^2 - 4k - 5 \leq 0 \Leftrightarrow k^2 - 2k - \frac{5}{2} \leq 0$. Отсюда $k \leq 1 + \sqrt{\frac{7}{2}}$, то есть $k = 1, 2$. В случае $k = 1$ дискриминант меньше 0, а вот случай $k = 2$ даёт $p = 3$ и $q = 5$. Эта пара и является единственным решением уравнения.

Критерии проверки. (●) Только приведён верный ответ: 1 балл. (●) Доказано, что $q = k \cdot p - 1$: 2 балла. (●) Уравнение рассмотрено как квадратное относительно p и найден дискриминант: 1 балл. (●) Доказано, что $k = 1,2$: 2 балла. (●) Верный ответ: 1 балл.

9.5. В группе 20 учащихся, каждый из которых дружит ровно с тремя другими. Некоторые пятеро из них 1 марта купили билет на концерт 1 апреля. Далее в каждый следующий день, начиная со 2 марта, ровно один из тех, кто ещё не купил билет, но, как минимум двое из его друзей уже купили, тоже покупает билет. а) Может ли случиться так, что в итоге все учащиеся купят билет?

б) Пусть дополнительно известно, что, если разбить всю группу произвольным образом на две подгруппы, то всегда найдутся двое дружащих между собой учащихся из разных подгрупп. Найдите минимальное n такое, что при любой схеме знакомств в группе, и любом выборе n купивших билет 1 марта, в итоге описанного выше процесса все учащиеся группы купят билет на концерт.

Ответ. а) Нет, б) $n = 18$.

Решение. а) Рассмотрим множество пар друзей (Р-пары), в которых один из них купил билет, а второй – нет, 1 марта их не больше $5 \cdot 3 = 15$. В очередной день, если покупает билет учащийся, у которого все три друга уже с билетом, количество Р-пар уменьшается на 3. Если покупает билет учащийся А, у которого ровно два друга Б и В уже с билетом, а Г – нет, то количество Р-пар уменьшается на 1: пропадают пары АБ и АВ, но появляется пара АГ. Следовательно, если процесс не остановится раньше, то через 14 дней, 15 марта, останется не более $15 - 14 = 1$ – одной Р-пары, и процесс на этом остановится. Обилеченными будут всегда не более $5 + 14 = 19$ учащихся, то есть не все.

б) Если 1 марта обилечены не меньше 18 учащихся, то не обилечены всего не более двух. Если таковой всего один, у него три обилеченных друга и 2 марта он тоже купит билет. Если их два, то они либо не дружат и у каждого по три обилеченных друга, либо они дружат, тогда у каждого по два обилеченных друга. В любом случае, 2 марта они тоже купят билеты.

Осталось построить пример схемы дружб между 20 учащимися и указать 17 обилеченных из них так, чтобы каждый из трёх оставшихся имел ровно одного обилеченного друга. Всё изобразим в виде графа, где вершины – учащиеся, а рёбра – дружбы. Рассмотрим сначала два правильных семиугольника, один из которых расположен внутри другого, соединим рёбрами вершины первого и второго с одинаковыми номерами, получится кольцо, составленное из 7 четырёхугольников (это рёбра и грани семиугольной призмы). Внутри меньшего семиугольника возьмём треугольник, и соединим его первую вершину А с серединой первой стороны внутреннего семиугольника, вторую вершину В – с серединой третьей стороны семиугольника и третью вершину С – с серединой пятой его стороны. Обилечим всех, кроме А, В и С, тогда у

каждого из А, В и С только по одному обилеченному другу и процесс дальнейшего обилечивания даже не начнётся. Если 1 марта обилечены некоторые $n \leq 17$ учащихся, кроме А, В и С, в итоге ни один из А, В и С обилечен не будет. В противном случае в момент, когда обилечится первый из них, он не может иметь больше одного обилеченного друга – противоречие.

Это только один из множества возможных примеров такого рода.

Критерии проверки. (●) Доказательство пункта а): 3 балла. (●) Доказательство того, что $n \leq 18$: 1 балл. (●) Любой верный пример с обоснованием для $n = 17$: 3 балла. Если пример не связан: 1 балл.

а) Доказательство в целом верное, но вместо неравенств использованы равенства (например, утверждается, что первые пять купивших билеты имеют ровно 15 друзей среди оставшихся, или что при покупке билета количество дружб между людьми с билетами и без них уменьшается ровно на 1) — снимаем 1 балл.

Не учтено, что у учащегося, покупающего билет, могут быть и двое, и трое друзей, купивших билет (два случая) — снимаем 1 балл (не суммируется с предыдущим).

Разбор частных случаев графа дружб — 0 баллов.

б) Утверждение, что контрпример для $n=17$ можно построить, взяв цикл из трех попарно дружащих не купивших билет учащихся, без построения оставшейся части графа дружб — 0 баллов.

Любая ошибка в контрпримере для $n=17$ — снимаем 2 или 3 балла.