

**Решения заданий отборочного этапа Всесибирской открытой олимпиады
школьников по математике 2025-26 гг**

Любое верное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов

9 класс

9.1. Можно ли обозначить центры клеток квадрата 3 на 3 буквами $A_1, A_2, \dots, A_9$ в некотором порядке так, чтобы среди отрезков $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_8A_9, A_9A_1$ никакие два не были равны и параллельны одновременно? При этом отрезки могут пересекаться друг с другом и некоторые из них могут проходить через точки A_i , отличные от их концов.

Ответ. Да, можно.

Решение. Пример. Обозначим вертикали квадрата буквами a,b,c, а горизонтали - цифрами 1,2,3, как в шахматах. Тогда вершины $A_1, A_2, \dots, A_9$ следуют в таком порядке: a1, c3, b1, a3, c1, a2, b2, b3, c2.

Критерии проверки. ■ Любой правильный пример: 7 баллов. ■ Любой не правильный даже в одной паре ходов пример: 0 баллов.

9.2. В правильном шестиугольнике ABCDEF на диагоналях BD и DF соответственно отмечены точки P и Q такие, что длины отрезков BP и DQ равны длине стороны шестиугольника. Доказать, что точки C, P и Q лежат на одной прямой. Правильный шестиугольник – это шестиугольник, в котором равны все стороны и равны все углы.

Доказательство. В равнобедренном треугольнике BCD угол при вершине C равен 120° , поэтому величины углов CBD и CDB при основании равны по 30° . Следовательно, в равнобедренном треугольнике BCP величина угла при вершине CBP = CBD = 30° , а величины углов BCP и BPC при основании равны по 75° . Тогда величина угла DCP = $120^\circ - 75^\circ = 45^\circ$.

Теперь рассмотрим равнобедренный треугольник CDQ с равными сторонами CD=DE=DQ. В нём величина угла при вершине CDQ равна разности величин углов CDE=BCD= 120° и QDE=CBD= 30° , поэтому угол CDQ – прямой. Следовательно, углы DCQ и DQC при его основании равны по 45° . Таким образом, углы DCP и DCQ равны по 45° , значит точки C, P и Q лежат на одной прямой, что и требовалось доказать.

Критерии проверки. ■ Доказано, что величина угла DCP= 45° : 3 балла. ■ Доказано, что величина угла DCQ = 45° : 3 балла. ■ Отсюда сделан вывод, что точки C, P и Q лежат на одной прямой: 1 балл.

9.3. Найдите все пары целых чисел x, y , удовлетворяющих уравнению: $\sqrt{x - \sqrt{y}} + \sqrt{x + \sqrt{y}} = \sqrt{xy}$.

Ответ. 1) $x = 0, y = 0$, 2) $x = 2, y = 3$.

Решение. Из области определения уравнения следует, что оба числа x, y не меньше 0. Обе части уравнения неотрицательны, поэтому при возведении их в квадрат получим эквивалентное уравнение: $2x + 2\sqrt{x^2 - y} = xy$. Ввиду того, что $x \geq 0, y \geq 0$, выполнено неравенство $2\sqrt{x^2 - y} \leq 2x$, поэтому $xy = 2x + 2\sqrt{x^2 - y} \leq 2x + 2x = 4x$, следовательно, $0 \leq y \leq 4$. Осталось перебрать значения $y = 0, 1, 2, 3, 4$.

1) $y = 0$, тогда $2x + 2\sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 0$. Получаем решение $x = y = 0$.

2) $y = 1$, тогда $x + 2\sqrt{x^2 - 1} = 0$. Здесь $x \geq 1$, поэтому $x + 2\sqrt{x^2 - 1} \geq 1$ и уравнение в этом случае решений не имеет.

3) $y = 2$, тогда $2\sqrt{x^2 - 2} = 0$ – решений в целых числах нет.

4) $y = 3$, тогда $2\sqrt{x^2 - 3} = x \Leftrightarrow 4x^2 - 12 = x^2 \Leftrightarrow x = 2$. Получаем решение $x = 2, y = 3$.

5) $y = 4$, тогда $2\sqrt{x^2 - 4} = 2x \Leftrightarrow 4x^2 - 16 = 4x^2$ – решений нет.

Критерии проверки. ■ Доказано, что $0 \leq y \leq 4$: 3 балла. ■ Разобраны случаи $y = 0, 1, 2, 3, 4$: по 1 баллу за каждый случай, кроме $y = 0$. ■ При возведении в квадрат нет упоминаний о том, что обе части уравнения неотрицательны: минус 1 балл.

9.4. Пусть $a, b, c \neq 0$ – различные действительные числа такие, что $a + b + c = 0$ и $a^2 - b = b^2 - c = c^2 - a$. Пусть $a, b, c \neq 0$ – различные действительные числа такие, что $a + b + c = 0$ и $a^2 - b = b^2 - c = c^2 - a$. Найти значения выражений 1) abc , 2) $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$.

Ответ. 1) $abc = -1$, 2) $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 3$.

Решение. 1. Перепишем равенство $a^2 - b = b^2 - c$ в виде $(a - b)(a + b) = b - c$, аналогично $b^2 - c = c^2 - a$ в виде $(b - c)(b + c) = c - a$, и $c^2 - a = a^2 - b$ в виде $(c - a)(c + a) = a - b$. Перемножим три полученных равенства и поделим обе части полученного произведения на $(a - b)(b - c)(c - a) \neq 0$, получим $(a + b)(b + c)(c + a) = 1 = (-c)(-a)(-b) = -abc$. Следовательно, $abc = -1$.

2. Преобразуем равенство $(a - b)(a + b) = b - c \Leftrightarrow (a - b)(-c) = b - c, \Leftrightarrow a - b = 1 - \frac{b}{c}$, (из пункта 1 следует, что a, b, c не равны 0). Аналогично, $b - c = 1 - \frac{c}{a}$, $c - a = 1 - \frac{a}{b}$. Сложив три полученных равенства, получим $a - b + b - c + c - a = 0 = 3 - \frac{b}{c} - \frac{c}{a} - \frac{a}{b}$, откуда $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 3$.

Критерии проверки. ■ Доказано, что $abc = -1$: 3 балла. ■ Найдено $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 3$: 4 балла. ■ Верные ответы посчитаны на угаданном верном примере чисел a, b, c : 2 балла.

9.5. На банкет пришли 30 гостей, каждый оставил в гардеробе пару галош и шляпу, все галоши и все шляпы были разного размера, скажем, от 1-ого до 30-ого, причём размеры галош и шляпы у гостя могли не совпадать. После банкета гости уходили строго по одному, каждый одевал случайную пару галош и шляпу размеров, не меньших собственных. В какой-то момент оказалось, что ни один оставшийся гость не может выбрать себе пару галош и шляпу размеров, не меньших собственных. Какое максимальное количество гостей могло при этом остаться?

Ответ: 20.

Решение. Пример. Занумеруем гостей по размеру галош, пусть у первых десяти размер шляпы равен номеру галош, у вторых десяти размер шляпы на 10 больше размера галош, а у последних десяти – на 10 меньше. Если первыми уйдут первые десять, и каждый обуется и оденется в предметы, на 20 размеров больше своего номера, то они унесут все шляпы размеров с 21 по 30, поэтому оставшиеся гости из второго десятка не смогут найти себе подходящую шляпу, и также уведут все галоши размеров с 21 по 30, поэтому оставшиеся гости из третьего десятка не смогут найти себе подходящую пару галош.

Оценка. Докажем, что, если осталось не меньше 21 гостя, то, как минимум один из них сможет найти в гардеробе подходящие галоши и шляпу. Рассмотрим сначала 12 оставшихся гостей с самыми маленькими номерами, после k – ого из них есть не менее 21- k оставшихся гостей с большими номерами, значит, у него не более, чем $k+9$ -ый размер галош, $k=1,2,...,12$. С другой стороны, рассмотрим 12 самых больших размеров оставшихся пар галош, перед k – ой из них есть не менее $9+k-1 = k+8$ оставшихся галош с меньшими номерами, значит, у неё не менее, чем $k+9$ -ый размер галош, $k=1,2,...,12$. Следовательно, каждый из этих 12 оставшихся гостей сможет найти себе подходящую пару галош.

Осталось заметить, что из этих 12 оставшихся гостей найдётся один с размером шляпы не большим 19 (минимальным, после него ещё 11 гостей с большими размерами), а среди оставшихся 21 шляпы найдётся шляпа размера не меньшего, чем 21 (максимального, перед ней 20 шляп меньшего размера). Вот этот гость и сможет её одеть и уйти.

Более вероятно, что оценка будет написана участниками проще. Пусть осталось не меньше 21 гостя, тогда осталось и не меньше 21 пары галош. Всего размеров 30, поэтому не меньше, чем $21+21-30=12$ размеров оставшихся галош

совпадут с размерами ног некоторых 12 из оставшихся гостей, обуем их в эти (их собственные!) галоши. Теперь рассмотрим 12 этих обутых гостей, у них 12 размеров голов, и осталась 21 шляпа, поэтому не менее, чем $12+21-30=3$ размеров оставшихся шляп совпадут с размерами голов некоторых трёх из обутых оставшихся гостей. Любой из этих трёх гостей полностью экипирован и может покинуть сборище.

Заметим, что аналогичное рассуждение для 20 оставшихся гостей уже не проходит на этапе выбора шляп. Причина в том, что этот уходящий гость может так выбрать галоши и шляпу, что оставшимся двум из рассмотренной тройцы уже не удастся правильно одеться. Поэтому замечание в условии, что гости уходят строго по одному, существенно.

Критерии проверки. ■ Пример для 20 гостей с обоснованием: 3 балла. ■ Пример для 20 гостей без обоснования: 1 балл. ■ Доказательство того, что ответ не больше 20: 4 балла, из них: ■ Если только замечено, что из оставшихся 21 гостя как минимум 12 смогут обуться: 1 балл. ■ Если затем рассмотрены эти 12 обувшихся и доказано, что как минимум один из них сможет подобрать себе шляпу: ещё 3 балла.