

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2025-26 г.г.
Отборочный этап
11 класс
Время написания работы 4 астрономических часа *Решения всех задач оцениваются из 7 баллов*

11.1. Докажите, что величина выражения $A = \frac{(b-c)^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{(c-a)^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{(a-b)^2}{(c-a)(c-b)}$, если оно определено, не зависит от a , b и c . Найдите её.

11.2. На отрезке АВ с центром О, как на диаметре, построена полуокружность. На ней взята произвольная точка Р, отличная от А и В, и отмечена точка М, являющаяся серединой дуги АР полуокружности. При этом считаем, что дуга АР меньше дуги ВР. Точка пересечения прямой ВР с прямой, параллельной РМ, и проходящей через О, обозначена через Т. Докажите, что справедливо равенство РО=РТ.

11.3. Найти все пары простых чисел p и q , для которых число $pq - p - q + 11$ является точным квадратом некоторого натурального числа.

11.4. Функция $f(x)$ определена для всех действительных чисел, принимает действительные значения и отлична от константы. Докажите, что существуют различные действительные числа x, y такие, что $f(x + y) < f(xy)$.

11.5. В классе 24 ученика. Каждая группа, состоящая из трех учеников, встречается, выбирает одного из 21 оставшихся учеников, назовём его А, и делает ему подарок. При этом А считает каждого члена группы, которая сделала ему подарок, своим другом. Докажите, что есть ученик, у которого есть по крайней мере 10 друзей. Обращаем внимание, что в процессе дарений участвуют все возможные тройки учеников этого класса.