Заключительный этап Всесибирской Открытой Олимпиады Школьников по физике

10 марта 2024 г.

Решения и критерии оценки, 11 класс

1. Выгуливая собачку, ее хозяин прошел путь S с постоянной скоростью по прямой тропинке. Собачка бежала в попутном направлении, затем, упершись в поводок, поворачивала и бежала назад, снова натягивала поводок, поворачивала вперед, и так далее. Бегая вперед и назад, она в начале прогулки по тропинке, в ее конце и N раз посредине прогулки оказывалась вровень с хозяином. Скорость собачки при этом не менялась, и на бег в попутном направлении она затрачивала времени в 2 раза больше, чем в обратном. Определите длину поводка. Временем поворота собачки пренебречь.

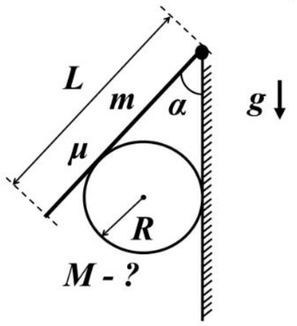
Возможное решение

Предположим, что скорость хозяина v, собачки u, а длина поводка l. При движении вперед собака относительно хозяина имела скорость $u-v$, при движении назад $u+v$. Время удаления собаки от хозяина вперед $t_1 = l/(u-v)$ <1 балл>, ее возращения назад к хозяину $t_2 = l/(u+v)$ <1 балл>, так что $\dfrac{t_1}{t_2} = \dfrac{u+v}{u-v} = 2$, откуда $u = 3v$ <2 балла>. Время от одной встречи собачки с хозяином до другой $\tau = t_1 + t_2 = \dfrac{l}{2v} + \dfrac{l}{4v} = \dfrac{3l}{4v}$ <2 балла>. Это время не зависит от того, в какую сторону собака удалялась от хозяина, вперед или назад. Число удалений собаки от хозяина равно $N+1$. Время движения хозяина $\dfrac{S}{v} = (N+1)\tau$ <2 балла>. Выразив из последнего равенства l, получаем ответ.

Ответ: $l = \dfrac{4S}{3(N+1)}$ <2 балла>

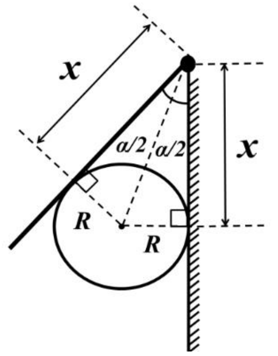
Разбалловка по этапам

	Этапы решения	Соотношения	Балл
1	Время движения собачки вперед	$t_1 = l/(u-v)$	1
2	Время движения собачки назад	$t_2 = l/(u+v)$	1
3	Определение отношения скоростей собачки и ее хозяина	$\dfrac{t_1}{t_2} = \dfrac{u+v}{u-v} = 2$, $u = 3v$	2
3	Определение времени от одной встречи собачки с хозяином до другой	$\tau = t_1 + t_2 = \dfrac{3l}{4v}$	2
4	Определение времени движения хозяина	$\dfrac{S}{v} = (N+1)\tau$	2
5	Получение ответа	$l = \dfrac{4S}{3(N+1)}$	2



2. Однородный цилиндр радиусом R прижимается к вертикальной стене однородной пластиной длиной L и массой m, висящей на шарнире. Пластина составляет угол α =60° с вертикалью. Определите максимальную массу цилиндра, при которой возможно равновесие, если коэффициент трения между цилиндром и пластиной равен μ, а трение между цилиндром и стеной так велико, что не допускает проскальзывания.

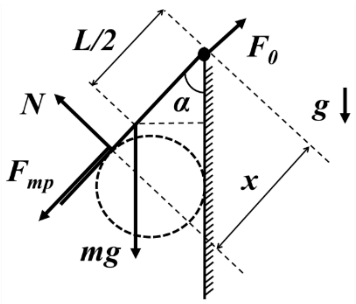
Возможное решение

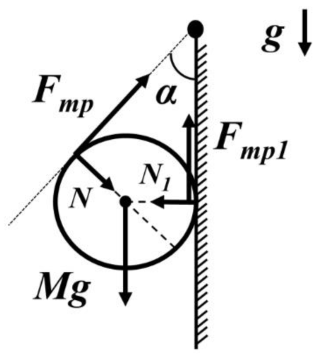


Вначале определим расстояние x от шарнира до точки, где пластина касается цилиндра. Из построений на рисунке видно, что

$x = R \cdot ctg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = R\sqrt{3}.$ <2 балла>.

На пластину действует сила тяжести mg, сила реакции опоры со стороны цилиндра N, сила трения $F_{\text{тр}}$ и некоторая удерживающая сила со стороны шарнира F_0. Алгебраическая сумма моментов сил относительно шарнира равна нулю: $mg\frac{L}{2}\sin\alpha = Nx.$ <2 балла>





На цилиндр со стороны пластины и стены действуют силы реакции опоры N и N_1, силы трения $F_{\text{тр}}$ и $F_{\text{тр}1}$ и сила тяжести Mg. Требуется определить максимальную массу цилиндра, при которой возможно равновесие, поэтому сила трения покоя со стороны пластины должна быть максимальна и равна $F_{\text{тр}} = \mu N$.

Запишем равенство моментов сил относительно центра цилиндра:
$F_{\text{тр}}R = F_{\text{тр}1}R$, так что $F_{\text{тр}1} = F_{\text{тр}} = \mu N$ <2 балла>.

Второй закон Ньютона для цилиндра в проекции на вертикальную ось принимает вид:
$F_{\text{тр}}\cos\alpha + F_{\text{тр}1} - N\sin\alpha - Mg = 0$ <2 балла>
Подставив значения $F_{\text{тр}}, F_{\text{тр}1}, N$, находим ответ.
Равновесие возможно, если равновесию цилиндра отвечает положительная величина его массы, то есть, выполняется условие: $\mu > \frac{1}{\sqrt{3}}$.
Ответ: $M = m\frac{\sqrt{3}L}{8R}\left(\mu\sqrt{3} - 1\right)$, при $\mu > \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Разбалловка по этапам

	Этапы решения	Соотношения	Балл
1	Найдено расстояние от шарнира до точки касания пластины и цилиндра	$x = R \cdot ctg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = R\sqrt{3}x$	2
2	Найдена сила взаимодействия пластины и цилиндра	$N = mg\frac{L}{2x}\sin\alpha$	2
3	Установлена связь сил трения	$F_{\text{тр}1} = F_{\text{тр}} = \mu N$	2
4	Получено уравнение, позволяющее найти массу цилиндра	$F_{\text{тр}}\cos\alpha + F_{\text{тр}1} - N\sin\alpha - Mg = 0$	2
5	Получен ответ	$M = m\frac{\sqrt{3}L}{8R}\left(\mu\sqrt{3} - 1\right)$, при $\mu > \frac{1}{\sqrt{3}}$	2

3. Какое максимальное напряжение U можно подать на последовательно соединенные сопротивления $R_1 = 10$ Ом и $R_2 = 20$ Ом, если они рассчитаны на мощность, не превышающую $W_1 = 1{,}6$ Вт и $W_2 = 1{,}8$ Вт, соответственно? Величина сопротивлений не зависит от величины тока, протекающего по ним.

Возможное решение

При поданном напряжении U через сопротивления будет идти ток $I = U/(R_1 + R_2) = U/30$ А. <2 балла>

Мощности, выделяемые на сопротивлениях, будут равны:

$W_1 = I^2R_1 = U^2\ 10/900 = U^2/90$,

$W_2 = I^2R_2 = U^2\ 10/900 = U^2/45$. <2 балла>

Предельным мощностям W_1 и W_2, данным в условии задачи, будут соответствовать предельные напряжения U_1 и U_2. <2 балла>

Находим U_1 и U_2.

$U_1^2 = 90\ W_1 = 90 \cdot 1.6 = 9 \cdot 16. \rightarrow U_1 = 12$ В.

$U_2^2 = 45\ W_1 = 45 \cdot 1.8 = 90 \cdot 0.9 = 81. \rightarrow U_2 = 9$ В. <2 балла >

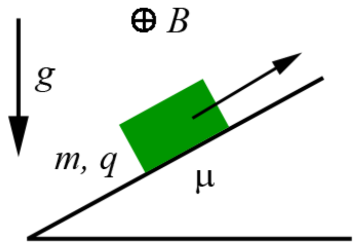
Отсюда получаем максимальное безопасное напряжение.

Ответ: $U_{\text{макс}} = 9$ В. <2 балла >

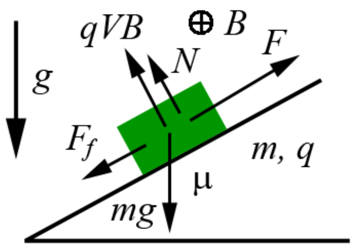
Разбалловка по этапам

	Этапы решения	Соотношения	Балл
1	Нахождение полного тока	$I = U/(R_1 + R_2) = U/30$ А	2
2	Определение мощностей, выделяемых на двух сопротивлениях	$W_1 = I^2R_1 = U^2\ 10/900 = U^2/90$, $W_2 = I^2R_2 = U^2\ 10/900 = U^2/45$.	2
3	Предельным мощностям соответствуют предельные напряжения		2
4	Нахождение предельных напряжений	$U_1^2 = 90\ W_1 \rightarrow U_1 = 12$ В. $U_2^2 = = 45\ W_1 \rightarrow U_2 = 9$ В.	2
5	Получение ответа	$U_{\text{макс}} = 9$ В.	2

4. На наклонной плоскости с углом α находится тело массой m, имеющее положительный электрический заряд q. Горизонтальное магнитное поле с индукцией B направлено, как показано на рисунке. Тело начинают тянуть вверх по наклонной плоскости, прикладывая постоянную силу. При какой максимальной длине плоскости тело сможет достичь ее края, не оторвавшись? Ускорение свободного падения g, коэффициент трения между телом и плоскостью μ.



Возможное решение



Для того, чтобы тело начало двигаться вверх по плоскости, к нему необходимо приложить силу $F \geq mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$ <1 балл>. Пусть в какой-то момент времени тело движется со скоростью V. При этом на него действует сила F, сила тяжести mg, сила реакции опоры N, сила трения $F_f = \mu N$ и сила Лоренца qVB, сонаправленная с силой реакции опоры <1 балл>. Направим ось x вдоль плоскости вверх, ось y поперек плоскости вверх. Пока тело не отрывается от плоскости, второй закон Ньютона в проекциях на оси записывается в виде

y: $N + qVB - mg\cos\alpha = 0$,

x: $ma = F - mg\sin\alpha - \mu N$. <2 балла>

Выражая отсюда ускорение, получаем

$ma = \frac{m\Delta V}{\Delta t} = F - mg\sin\alpha - \mu(mg\cos\alpha - qVB)$ или

$$m\Delta V = (F - mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha)\Delta t + \mu qBV\Delta t = (F - mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha)\Delta t + \mu qB\Delta x.$$

<2 балла>

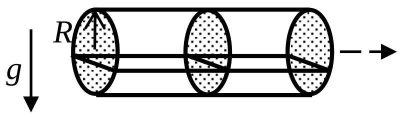
Отсюда получаем, что после прохождения расстояния x скорость тела $V \geq \mu qBx/m$. Условие отсутствия отрыва $N \geq 0$, то есть $qVB \leq mg\cos\alpha$. (1) <1 балл>

Чтобы получилась максимальная длина, скорость должна быть минимальной. Это достигается при минимально возможной силе $F = mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$ <1 балл>. В таком случае $V = \mu qBx/m$. Максимальная длина получается из условия равенства в соотношении (1).

Ответ: $x_{max} = \frac{m^2 g\cos\alpha}{\mu q^2 B^2}$. <2 балла>

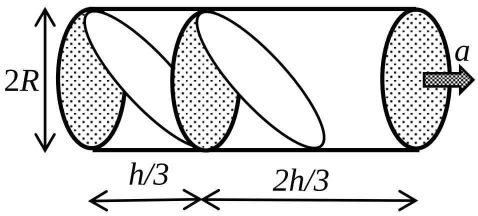
Разбалловка по этапам

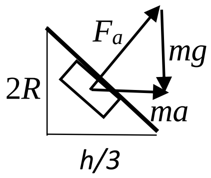
	Этапы решения	Соотношения	Балл
1	Определение минимальной силы для начала скольжения тела вверх	$F \geq mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$	1
2	Указание сил, действующих на тело при движении со скоростью V	F, mg, N, qVB	1
3	II закон Ньютона при скольжении тела	y: $N + qVB - mg\cos\alpha = 0$, x: $ma = F - mg\sin\alpha - \mu N$.	2
4	Определение соотношения между перемещением тела и приращением его скорости	$m\Delta V = (F - mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha)\Delta t + \mu qB\Delta x$.	2
5	Условие, что тело не оторвется в конце его пути	$qVB \leq mg\cos\alpha$	1
6	Выбор силы для достижения максимальной длины	$F = mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$	1
7	Получение ответа	$x_{max} = \frac{m^2 g\cos\alpha}{\mu q^2 B^2}$	2



5. Закрытый цилиндр радиусом R находится в горизонтальном положении. Посредине цилиндра установлен легкий подвижный поршень, плотно перекрывающий сечение цилиндра. Третья часть объема слева и справа от поршня заполнена жидкостью плотностью ρ, остальной объем – газом с неизвестным давлением. Цилиндр начали двигать вправо, постепенно увеличивая ускорение. При некоторой величине ускорения поршень сместился влево от центрального положения, деля объем цилиндра в пропорции 1 к 2, а поверхность жидкости наклонилась настолько, что в левой части цилиндра она стала касаться поршня только в его нижней точке. Определите начальное давление газа. Колебания жидкости отсутствуют. Ускорение свободного падения g.

Возможное решение





Пусть высота цилиндра равна h, тогда начальные объемы, на которые поршень делит цилиндр, равны $V = \pi R^2 h / 2$. Объемы жидкости слева и справа от поршня одинаковы и равны $V/3$. После смещения поршня объем части цилиндра слева от поршня уменьшился до $2V/3$, при этом объем газа слева от поршня сделался равным объему жидкости, и формы этих объемов совпали. Если поверхность жидкости в левой части цилиндра касается нижней точки поршня, то в верхней своей точке она точно так же касается верхней точки левой крышки цилиндра <2 балла>. Угол α, под которым поверхность жидкости наклонена к горизонтали, удовлетворяет равенству $tg\alpha = \frac{6R}{h}$.<2 балла>. Этот угол определяется ускорением цилиндра: горизонтальное ускорение a некоторой порции жидкости вблизи поверхности создается силой давления F_a (силой Архимеда), направленной перпендикулярно поверхности жидкости, и силой тяжести, действующей на эту порцию жидкости, mg, так что $tg\alpha = \frac{a}{g}$. <2 балла>. Ускорение a можно определить, рассматривая динамику жидкости справа от поршня. Масса этой жидкости $m = \rho\pi R^2 h / 6$. Второй закон Ньютона для этой части жидкости имеет вид $ma = (P_1 - P_2)\pi R^2$. <2 балла>. Начальное давление газа справа и слева от поршня одинаково и равно P. Конечный объем газа слева от поршня равен $\frac{V}{3}$, справа – V.

Записываем закон Бойля-Мариотта для левого объема, $\frac{2PV}{3} = \frac{P_1 V}{3}$, и для правого объема, $\frac{2PV}{3} = P_2 V$. <2 балла>. Таким образом получаем выражения для давлений: $P_1 = 2P, P_2 = \frac{2}{3}P$. Подставляя эти выражения во второй закон Ньютона, получаем выражение для ускорения $a = \frac{8P}{\rho h}$. С другой стороны, это ускорение можно выразить через $tg\alpha$. Равенство этих ускорений записываем в виде $\frac{8P}{\rho h} = \frac{6Rg}{h}$, откуда получаем ответ.

Ответ: $P = \frac{3\rho g R}{4}$ <2 балла>

Разбалловка по этапам

	Этапы решения	Соотношения	Балл
1	Установление равенства объемов жидкости и газа слева от поршня		1
2	Определение угла наклона поверхности жидкости	$tg\alpha = \frac{6R}{h}$	1
3	Связь наклона поверхности жидкости с ускорением	$tg\alpha = \frac{a}{g}$	2
4	II закон Ньютона для жидкости справа от поршня	$ma = (P_1 - P_2)\pi R^2$, $m = \rho\pi R^2 h / 6$	2
5	Закон Бойля-Мариотта для газа слева и справа от поршня	$\frac{2PV}{3} = \frac{P_1 V}{3}$, $\frac{2PV}{3} = P_2 V$	2
6	Получение ответа	$P = \frac{3\rho g R}{4}$	2