Заключительный этап Всесибирской Открытой Олимпиады Школьников по физике 10 марта 2024 г.

7 класс

***Возможные* решения с баллами. Максимальный балл за задачу – 10.**

1) При сплаве на плотах по длинной неисследованной реке туристы используют беспилотник с камерой. Максимальная скорость беспилотника равна V=5 м/с, а время полета T_1 на одной зарядке аккумулятора равно 10 минут. Туристы ждут, пока беспилотник отлетит вниз по течению на L=500 м, и начинают сплав, изучая русло перед плотом через камеру все время летящего впереди беспилотника. К моменту разрядки аккумулятора туристы возвращают беспилотник на плот, сразу пристают к берегу и устраивают привал на T_2=25 минут, пока аккумулятор заряжается от солнечной батареи. Затем путь продолжается. Какова максимально возможная средняя скорость такого движения туристов вдоль реки, если средняя скорость ее течения равна U=6 км/ч?

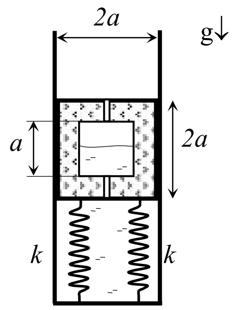
Решение. Сначала заметим, что максимальное непрерывное время движения плота на воде равно T_1-L/V=500 с (+3 балла). Так будет, если беспилотник удаляется от плота на L с максимальной скоростью. Причем не важно, как он двигается после этого (+1 балл).

За это время плот спустится вдоль реки на $S=U(T_1-L/V)$ (+2 балла). Согласно условию задачи, следующий отрезок такой длины плот преодолеет после привала продолжительностью T_2. Таким образом, средняя скорость движения вдоль реки у туристов с плотом составит

$V_{ср}= S/(T_1+T_2)=U(T_1-L/V)/(T_1+T_2)=$ 10/7 км/час

(+4 балла за явно сформулированный и обоснованный ответ).

2) В вертикальный сосуд квадратного сечения вставлен поршень в виде куба с ребром $2a$. В центре этого куба имеется полость, также имеющая форму куба, но с ребром a. Эта полость соединена с окружающей средой очень тонкими вертикальными каналами (см. рис.). Поршень прикреплен ко дну сосуда двумя пружинами жесткостью k. В сосуд заливают жидкость плотностью ρ. В момент, когда полость заполнена наполовину, пружины не деформированы. Какой объем жидкости надо еще долить, чтобы весь поршень оказался в жидкости? Считать, что трение, внешнее давление, а также зазоры между поршнем и стенками сосуда пренебрежимо малы. Поршень до края сосуда не доходит.



Решение. Обозначим массу поршня M, деформацию пружин в конечном состоянии X, площадь сечения вертикального канала s (она считается очень малой).

Условие равновесия поршня в ситуации, когда пружины не деформированы:

$Mg-(4a^2-s)\rho ga+(a^2-s)\rho ga/2=0$ (+2 балла)

Здесь учтено, что *разница* давлений в жидкости определяется *разностью* глубин. В любом случае при заливании жидкости поршень сдвигается вверх (+1 балл).

Пренебрегая вкладом ненулевого сечения каналов, т.е. считая $a^2 >> s$, получаем, что

$Mg=a^3\rho g\cdot 7/2$ (+1 балл)

Из этого уравнения также следует, что плотность материала поршня равна $\rho/2$.

В том случае, когда поршень погружается полностью, равнодействующая сил давления жидкости на него становится равной

$(4a^2-s)\rho g2a-(a^2-s)\rho ga\cdot 3/2+(a^2-s)\rho ga/2=(7a^3-sa)\rho g$ (+1 балл)

Это равенство можно получить и формально применяя закон Архимеда к погруженному телу с полостью (так как силы давления на вертикальные грани поршня были бы все равно горизонтальны, если бы поршень был окружен жидкостью).

А новое условие равновесия поршня имеет вид

$Mg - (7a^3-sa)\rho g + 2kX = 0$ (+2 балла)

При условии $a^2 >> s$, получаем

$$X = \frac{-Mg + 7\rho g a^3}{2k} = \frac{7\rho g a^3}{4k}$$ (+1 балл)

Значит, доливаемый объем жидкости должен заполнить всю полость (a^3) до конца и освободившийся из-за смещения поршня объем под поршнем ($4Xa^2$), т.е. искомый объем жидкости равен

$$V = \frac{a^3}{2} + \frac{7\rho g a^5}{k}$$ (+2 балла за явно сформулированный и корректно полученный ответ).

Можно было бы решить задачу быстрее, заметив, что после доливания воды добавочная сила, растягивающая пружины, равна $7a^3\rho g/2$ (архимедовой силе, действующей на половину поршня) и обойтись меньшим числом уравнений.

3) У $\boldsymbol{N}$ быстрых белок есть $\boldsymbol{M}<\boldsymbol{N}$ шишек, и они все сразу играют с ними, без остановки бегая по сосне вверх-вниз. Игра такая: каждая из белок поднимает одну шишку на самый верх сосны, бросает эту шишку вниз, бежит до самой земли, ловит ту шишку, которая в этот момент падает на землю, и опять поднимается. Определите, сколько времени $\boldsymbol{T}$ падает вниз *шишка*, если белка, поднимая шишку вверх, тратит время $\boldsymbol{T_1}$, а сбегает вниз по сосне за время $\boldsymbol{T_2}$.

Решение. Обозначим переменной X>0 число белок, которые одновременно бегут вверх по сосне, поднимая шишки, Y>0 - число белок, которые одновременно бегут по сосне вниз, Z>0 – число шишек, которые одновременно летят между верхушкой сосны и землей.

В этих обозначениях $\boldsymbol{N}$=X+Y, $\boldsymbol{M}$=X+Z, так как каждая из поднимающихся белок несет одну шишку. Также заметим, что каждая белка забегает на вершину через T_1/X после предыдущей (+1 балл), добегает до земли через T_2/Y (+1 балл), а шишки долетают до земли через время T/Z (+1 балл).

Также заметим, что все повторяется циклически, т.е. частота бросания шишек (количество брошенных шишек за единицу времени, например, в расчете на секунду), равна частоте подхватывания падающей шишки, частоте подъема белок на верх сосны и т.д., т.е.

$$\frac{T_1}{X}=\frac{T_2}{Y}=\frac{T}{Z} \qquad (+2\text{ балла})$$

Из свойств дробей известно, что из этих равенств следует

$$\frac{T_1}{X}=\frac{T_2}{Y}=\frac{T_1+T_2}{X+Y}=\frac{T_1+T}{X+Z} \qquad (+2\text{ балла})$$

Проводя преобразования, получаем

$T_1X+T_1Z+T_2X+T_2Z= T_1X+T_1Y+TX+TY$

$T_2(X+Z) + T_1(Z-Y)=T(X+Y)$

Имея в виду, что Y-Z=$\boldsymbol{N}$-$\boldsymbol{M}$, получаем

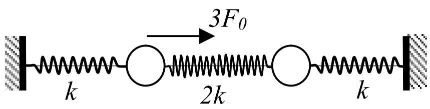
$$T=\frac{T_1(M-N)+T_2M}{N}=\frac{(T_1+T_2)M}{N}-T_1$$

(+3 балла за явно сформулированный и обоснованный ответ).

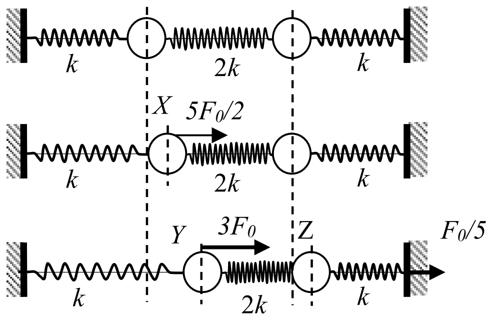
Из ответа видно, что не при всяком наборе N, M, T_1 и T_2 можно реализовать описанную в условии ситуацию.

Можно также заметить, что, например, на вершине белка появляется через время $\frac{T_1+T_2}{N}$ после предыдущей (каждая из N белок тратит на один оборот T_1+T_2), а шишка, которую несет эта же белка, появится через то же самое время, но равное $\frac{T_1+T}{M}$ (время, за которое проходит один оборот каждая из M шишек, равно T_1+T).

4) Между двумя стенками закреплен стержень, на который надето 2 одинаковых бусины. Между бусинами и стержнем есть трение, и чтобы двигать любую бусину вдоль стержня надо прикладывать к ней, как минимум, силу F_0. Эти бусины прикрепляют пружинами к стенкам, а также друг к другу, как показано на рисунке. Жесткость пружин равна, начиная от стенки, k, $2k$, k (см. рис.). К левой бусине прикладывают внешнюю силу, направленную вправо, и медленно увеличивают эту силу до значения $3F_0$. Найдите силу, которая в конечном итоге действует на *правую* стену со стороны прикрепленной к ней пружины. Вначале все пружины не деформированы.



Решение. Сначала определим, до какой величины должна возрасти внешняя сила, чтобы правая бусина сдвинулась с места. Согласно условию, для этого надо, чтобы со стороны центральной пружины к правой бусине была приложена сила F_0 (+1 балл). Здесь учтено, что правая пружина исходно не деформирована и ни на бусину, ни на стенку не действует.



Значит, левая бусина должна быть смещена на $X=F_0/2k$ (+1 балл). Чтобы деформации левой и центральной пружин были этому равны, к левой бусине должна быть приложена сила $F_1 = \frac{F_0}{2} + F_0 + F_0 = \frac{5F_0}{2}$ (+1 балл). Здесь учтено, что кроме сил упругости передвигаемой пружине приложена сила трения, направленная против движения, т.е. влево и туда же, куда и обе силы упругости, действующие со стороны пружин.

Так как $F_1<3F_0$, то при дальнейшем увеличении внешней силы будут двигаться обе бусины (+1 балл). Значит, если правая бусина сместится на Z, а левая – на Y от начальных положений, то условие равновесия правой бусины запишется так:

$F_0=2k(Y-Z)-kZ=2kY-3kZ$ (+1 балл). Здесь F_0 – величина силы трения, приложенной к правой бусине, смещающейся вдоль стержня. В правой части записаны силы упругости, приложенные к этой бусине со стороны соприкасающихся пружин.

Для левой бусины (при этих расположениях бусин) будет справедливо равенство

$3F_0=F_0+2k(Y-Z)+kY$ (+1 балл). Здесь левая часть уравнения – внешняя сила, в правой части суммируются сила трения и силы упругости, так как они все направлены в одну сторону.

Решая эту систему уравнений, получаем, что $Y=4F_0/5k$ (+1 балл), $Z=F_0/5k$ (+1 балл). Можно было бы также получить этот результат, заметив, что $Z = \frac{2k}{2k+k}(Y-X)$.

Отсюда непосредственно следует, что искомая сила, действующая на правую стенку, равна $kZ=F_0/5$, направленная вправо (+2 балла за явно сформулированный и корректно полученный ответ).

Для справки, на левую стенку действует сила, также направленная вправо и равная $kH=4F_0/5$. Т.е. сумма внешних сил, приложенных к системе из трех пружин и двух бусин, равна нулю, как и должно быть в равновесии. Этим силами являются направленные влево две силы трения, действующие со стороны стержня и равные F_0 каждая, и силы со стороны стенок, а также направленная вправо внешняя сила, приложенная к левой бусине и равная $3F_0$. С помощью этого соображения получить искомый результат можно проще.