Заключительный этап Всесибирской Открытой Олимпиады Школьников по физике 10 марта 2024 г.
8 класс

***Возможные* решения с баллами. Максимальный балл за задачу – 10.**

1) Теплоход ходит по реке между городами А и Б без остановок. Когда он идет из А, то по расписанию в Б прибывает ровно через T_1=4 суток, а когда обратно – ровно через T_2=6 суток. Однажды, когда до А оставались сутки хода, пошли дожди, река поднялась и скорость течения реки увеличилась вдвое. На какое время ΔT в этот раз опоздает теплоход, если будет поддерживать постоянную скорость относительно воды? Считать, что вдоль всей реки скорость течения одинакова и постоянна.

Решение. Обозначим L расстояние между городами, V и U – скорости теплохода (относительно воды) и течения до дождей.

Согласно условию

$T_1 = \frac{L}{V+U}$ и $T_2 = \frac{L}{V-U}$ (+2 балла)

Здесь учтено, что описанная в условии ситуация возможна только, если Б находится ниже по течению реки.

Из этих соотношений можно определить, что

$T_1(V+U) = T_2(V-U)$, т.е. $U = V\frac{T_2 - T_1}{T_2 + T_1} = \frac{V}{5}$ (+2 балла)

Отсюда можно также определить, что $L=6VT_1/5=4VT_2/5$.

Время преодоления последней одной шестой части пути при движении вверх по течению увеличилось на

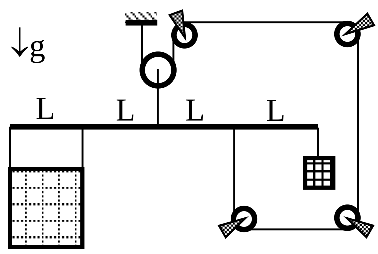
$\Delta T = \frac{L/6}{V-2U} - \frac{L/6}{V-U} = \frac{5L}{72\cdot V}$ (+3 балла за такое или аналогичное соотношение, которое позволяет приблизиться к ответу)

Используя приведенные выше уравнения, получаем

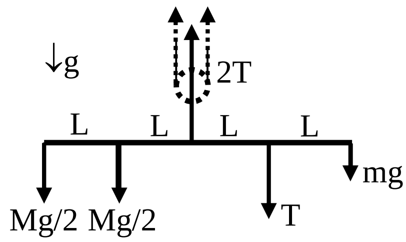
$$\Delta T = \frac{5\cdot 6VT_1}{72\cdot 5V} = \frac{T_1}{12} = \frac{T_2}{18} = \frac{1}{3}\,сут = 8\ ч = 480\ мин$$

(+3 балла за явно сформулированный и корректно полученный ответ)

2) Имеются невесомый стержень, который удерживается в горизонтальном положении системой блоков и грузов (см. рис.). Места крепления нитей делят длину стержня на 4 одинаковых части длиной L каждая. Найти отношение масс большого (по размерам) и малого грузов, если большой груз представляет собой однородный параллелепипед, который висит на двух одинаковых нитях. Массами нитей и подвижного блока можно пренебречь.



Решение. Обозначим T - натяжение нити, охватывающей подвижный блок, M - массу большого груза, m – массу малого груза. На рисунке справа показаны силы, приложенные к стержню со стороны прикрепленных к нему нитей. Здесь учтено, что натяжение нити между стержнем и подвижным блоком равно 2T (пунктиром показаны силы, действующие на подвижный блок со стороны другой нити), а натяжения нитей, на которых висит большой груз, одинаковы (центр масс этого груза находится в геометрическом центре груза), т.е. равны половине веса груза.



Условия равновесия груза имеют вид:

$2T=Mg+mg+T$ (сумма сил, +3 балла)

$2L\cdot Mg/2 + L\cdot Mg/2=T\cdot L+2L\cdot mg$ (+4 балла)

в данном случае моменты сил вычислены относительно центра стержня.

Из первого уравнения получаем, что $T=(M+m)g$

Подставляя это условие во второе соотношение, имеем

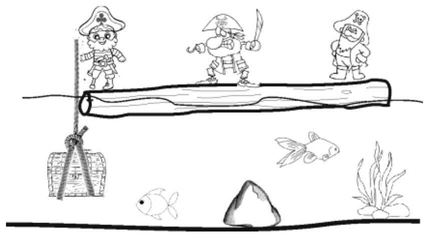
$2L\cdot Mg/2 + L\cdot Mg/2=(M+m)\cdot L+2L\cdot mg$

$MgL=6mgL$, т.е.

искомое отношение равно $M/m=6$.

(+3 балла за явно сформулированный и корректно полученный ответ)

3) Пираты поплыли на плоту за давно брошенным в озеро деревянным сундуком с золотыми и серебряными монетами. Когда они приподняли сундук над дном, плот погрузился на 82% своего объема, а когда сундук вытащили на плот, и через щели из него вытекла вся вода, то плот остался погруженным на 84% своего объема. Какова средняя плотность монет в сундуке, если вначале плот был погружен на 60% объема, а массой самого сундука можно пренебречь? Плотность воды и намокшей древесины равна ρ_B=1 т/м^3.



Решение. Обозначим искомую среднюю плотность и объем содержимого сундука как ρ_C и V_C, долю объема плота, которая была погружена в воду без дополнительной нагрузки в виде сундука, k_1=0.6, долю, погруженную в воду во время подъема сундука, k_2=0.82, и долю, погруженную в воду после вытекания воды, k_3=0.84. Для промежуточных вычислений введем также объем V и массу (со всеми пиратами) плота M.

Условия равновесия плота в описанных в условии ситуациях имеют вид

$\rho_B g k_1 V= Mg$ (+1 балл)

$\rho_B g k_2 V+\rho_B g V_C = Mg +\rho_C g V_C$ (+1 балл)

$\rho_B g k_3 V = Mg +\rho_C g V_C$ (+1 балл)

Заметим, что во втором уравнении нет необходимости учитывать силу тяжести, действующую на воду внутри сундука, в противном случае следует к обеим частям уравнения добавить одно и тоже слагаемое $\rho_B g V_X$, где V_X – объем воды внутри сундука (как раз эта вода, согласно условию, потом вытекла обратно в озеро). Исходя из аналогичных соображений, можно не учитывать выталкивающую силу, действующую на сам сундук, так как его плотность практически равна плотности воды.

Вычитая первое уравнение из остальных, получаем:

$\rho_B gV(k_2 - k_1) = (\rho_C - \rho_B)gV_C$ (+1 балл)

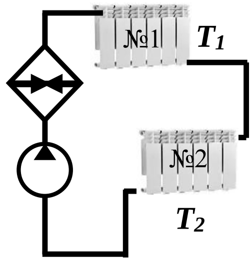
$\rho_B gV(k_3 - k_1) = \rho_C gV_C$ (+1 балл)

Деля получившиеся уравнения друг на друга, получаем:

$\frac{\rho_C - \rho_B}{\rho_C} = 1 - \frac{\rho_B}{\rho_C} = \frac{k_2 - k_1}{k_3 - k_1} = 1 - \frac{k_3 - k_2}{k_3 - k_1}$ (+2 балла за получение какого-либо соотношения без неизвестных величин)

$$\rho_C = \rho_B \frac{k_3 - k_1}{k_3 - k_2} = 12\rho_B = 12 \ \text{тонн}/\text{м}^3$$

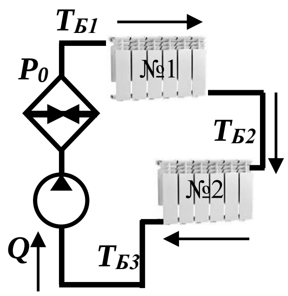
(+3 балла за явно сформулированный и корректно полученный ответ). Из ответа следует, что серебра (ρ=10.5) в сундуке было значительно больше, чем золота (19.3).



4) Для обогрева помещения насос прогоняет воду по замкнутому контуру через последовательно соединенные нагреватель и две одинаковые батареи (см. рис.). Нагреватель передает воде постоянную тепловую мощность, и в установившемся режиме температуры батарей равны T_1 и $T_2 < T_1$. Затем насос заменили, и он стал прокачивать через нагреватель *втрое больший* объем воды в единицу времени. Какой стала *температура* батареи №1 после этого, если температура воздуха из-за сквозняка все равно не изменилась? Тепловая мощность P, отдаваемая батареей при температуре воздуха T_B, рассчитывается по формуле $P=k(T_Б-T_B)$, где k – *неизвестный* постоянный коэффициент, а $T_Б$ – температура батареи, равная среднему *арифметическому* температур втекающей в батарею и вытекающей из батареи воды. Считать, что теплообмен с водой происходит только в нагревателе и батареях.

Решение. Обозначим объем, прокачиваемый насосом каждую единицу времени через нагреватель, как Q, мощность, передаваемую воде нагревателем, как P_0, искомую температуру батареи №1 как T_X, а температуру батареи №2 после включения усиленного режима работы насоса как T_Y.

Для промежуточных вычислений также введем температуру $T_{Б1}$ воды, втекающей в батарею №1 (т.е. *вытекающей* из нагревателя), $T_{Б2}$ воды, втекающей в батарею №2, и $T_{Б3}$ воды, вытекающей из батареи №2 (т.е. *втекающей* в нагреватель) в начальной ситуации. В таких обозначениях батарея №1 отдает в воздух тепловую мощность



$$P_1 = k(T_1 - T_B) = k\left(\frac{T_{Б1} + T_{Б2}}{2} - T_B\right),$$

а батарея №2 отдает

$P_2 = k(T_2 - T_B) = k\left(\frac{T_{Б2} + T_{Б3}}{2} - T_B\right)$. Здесь учтено, что в батарею №2 втекает вода с той же температурой, что вытекает из предшествующей батареи №1. Еще можно заметить, что $T_1 - T_2 = \frac{T_{Б1} - T_{Б3}}{2}$.

Используя очевидное условие $P_1+P_2=P_0$ (+1 балл), связь между параметрами задачи можно записать в такой форме

$P_0=P_1+P_2=k(T_2+T_1-2T_B)$ или $T_1+T_2=2T_B-\frac{P_0}{k}$, что показывает, что при постоянной мощности нагревателя и температуре воздуха сумма температур батарей в рассматриваемой модели не зависит от объема подаваемой воды (+2 балла).

С другой стороны, эти же мощности могут быть рассчитаны из условия теплового баланса в теплообмене воды с окружающей средой как

$P_1=QC\rho(T_{Б1}-T_{Б2})$ и $P_2=QC\rho(T_{Б2}-T_{Б3})$ (+1 балл)

Здесь C и ρ – удельная теплоемкость и плотность воды, соответственно, а также учтено, что через батареи проходит один и тот же объем воды. Аналогичным образом можно рассчитать и тепловую мощность, передаваемую воде в нагревателе

$P_0=QC\rho(T_{Б1}-T_{Б3})=2QC\rho(T_1-T_2)$ (+1 балл), что также легко получить из условия $P_1+P_2=P_0$. Это означает, что в условиях задачи разность температур батарей обратно пропорциональна объемной подаче воды.

После того, как насос станет прокачивать утроенный объем воды $3Q$, суммарная тепловая мощность батарей (как и условия теплового баланса) не изменится. Поэтому приведенные выше соотношения между параметрами задачи будут иметь вид

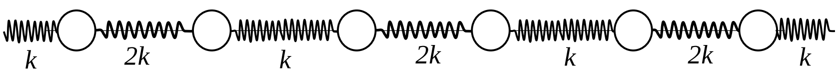
$P_0=k(T_X+T_Y-2T_B)$ и $P_0=6QC\rho(T_X-T_Y)$ (+1 балл)

Отсюда следует, что $T_X+T_Y=T_1+T_2$ и $3(T_X-T_Y)=T_1-T_2$ (+2 балла)

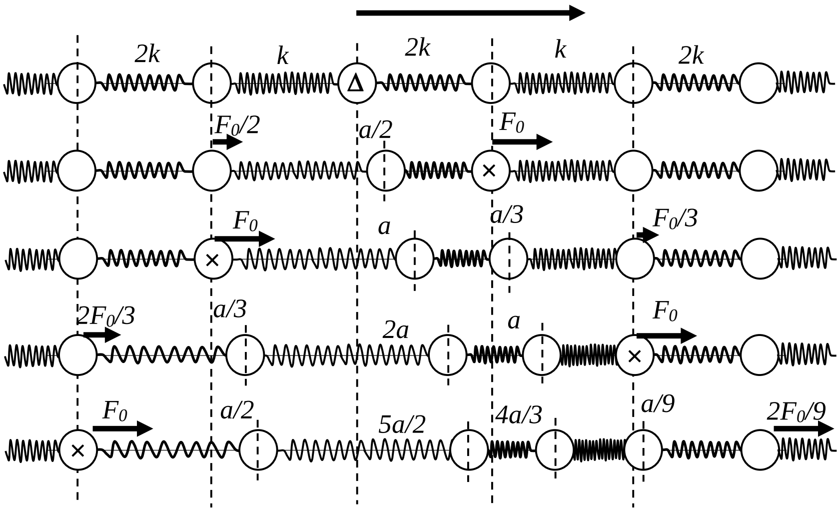
Решая эту систему уравнений, получаем $T_X=\frac{2T_1+T_2}{3}$. (+2 балла за явно сформулированный и корректно полученный ответ).

Для справки: $T_Y=\frac{2T_2+T_1}{3}>T_2$. Заметим, что температуру воды на входе или выходе батареи по данным задачи определить нельзя.

5) На очень длинную спицу надето много одинаковых бусин. Между бусинами и спицей есть трение, и чтобы двигать любую бусину вдоль спицы, надо прикладывать к ней, как минимум, силу F_0. Бусины соединяют между собой пружинами, жесткость которых чередуется и равна либо k, либо $2k$ (см. рис.). Затем к одной из бусин прикладывают внешнюю силу и пытаются медленно ее сдвинуть так, чтобы как минимум еще 3 бусины сдвинулись со своих мест. До какого минимального значения F_X придется увеличивать эту внешнюю силу, чтобы добиться такого результата, если вначале все пружины не деформированы?



Решение. Обозначим комбинацию $F_0/k=a$. Ниже представлен рисунок, на котором показаны смещения некоторых бусин относительно начальных положений при медленном смещении первой бусины, отмеченной в первой строчке треугольником. Дополнительно показаны значения сил, действующих со *стороны пружин* на те бусины, которые еще не сдвинулись с места. Крестиками указаны бусины, которые начнут смещаться при дальнейшем увеличении внешней силы и сдвиге первой бусины. Заметим, что со стороны недеформированной пружины сила к бусине не приложена.



Из приведенного рисунка очевидно, что четвертая бусина сдвинется с места сразу после того, как первая бусина сместится от своего начального положения больше, чем на $2a$. Таким образом, искомая предельная внешняя сила, приложенная к первой бусине, равна сумме сил трения и сил упругости пружин, прикрепленных к этой бусине:

$F_X = F_0 + k\cdot(2a - a/3) + 2k\cdot(2a - a) = 14F_0/3$

(по 2 балла за каждый правильно определенный момент смещения новой бусины, +2 балла за явно сформулированный, обоснованный и корректно полученный ответ)

Эта сила отличается от значения $4F_0$, которую можно было бы ожидать, если бы на смещающиеся 4 бусины не действовало сил со стороны других пружин. Если в качестве ответа приводится значение $4F_0$ с вышеозначенным обоснованием, то всего ставится 3 балла.

Далее иллюстрируется, что от направления сдвига первой пружины результат не зависит.