

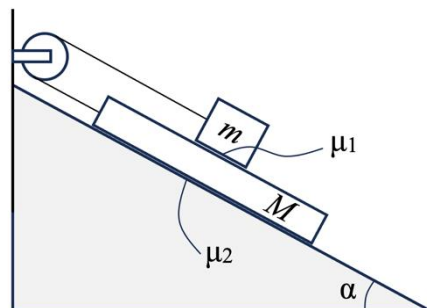
Олимпиада школьников «Ломоносов» по физике 2023/2024 уч. год.

Заключительный этап.

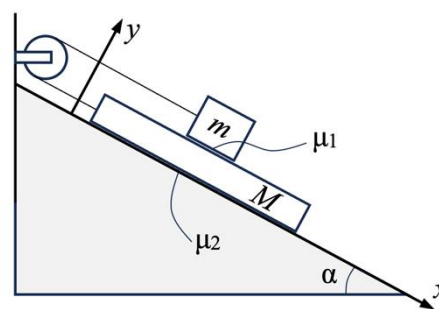
Задания, решения и критерии оценивания.

10 класс

1.1. Задача. Через легкий блок, прикрепленный к вертикальной стене, переброшена невесомая нерастяжимая нить. Один конец нити прикреплен к доске массой M , лежащей на наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 30^\circ$. Другой конец нити прикреплен к бруску массой $m = M/9$, который расположен на доске (см. рисунок). Определите модуль ускорения a , с которым будет двигаться доска, если коэффициент трения между бруском и доской $\mu_1 = 0,5$, а коэффициент трения между доской и опорой $\mu_2 = 0,3$. Участки нити между телами и блоком расположены в одной вертикальной плоскости параллельно наклонной плоскости. Трение в блоке отсутствует. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10 \text{ м/с}^2$.



1.1. Решение: Укажем все силы, действующие на доску и брусок, в предположении, что доска массой M движется вниз по плоскости, а брусок m – вверх по плоскости. По третьему закону Ньютона силы трения между доской и бруском равны по модулю, противоположны по направлению и приложены к обоим телам ($\vec{F}_{\text{тр}1} = -\vec{F}'_{\text{тр}1}$). Аналогично для сил реакции опоры ($\vec{N}_1 = -\vec{N}'_1$) между бруском и доской. Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось x , направленную вниз вдоль наклонной плоскости.



$$Ma_1 = Mg \sin \alpha - T - F_{\text{тр}1} - F_{\text{тр}2};$$

$$ma_2 = mg \sin \alpha + F'_{\text{тр}1} - T.$$

Так как нить нерастяжима, $a_1 = -a_2 = a$. Второй закон Ньютона в проекции на ось y , перпендикулярной к оси x , запишется в виде:

$$N_2 = N_1 + Mg \cos \alpha;$$

$$N'_1 = mg \cos \alpha.$$

С учетом того, что $N_1 = N'_1$, $F_{\text{тр}1} = F'_{\text{тр}1} = \mu_1 N_1$ и $F_{\text{тр}2} = \mu_2 N_2$, получим:

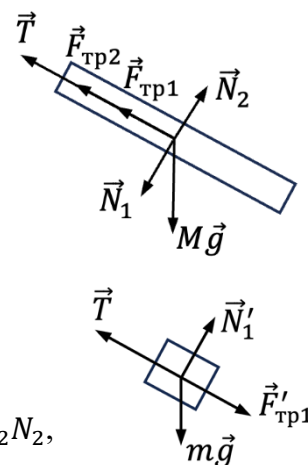
$$Ma = Mg \sin \alpha - T - \mu_1 mg \cos \alpha - \mu_2 (m + M)g \cos \alpha;$$

$$ma = T - mg \sin \alpha - \mu_1 mg \cos \alpha.$$

После сложения уравнений находим ускорение a .

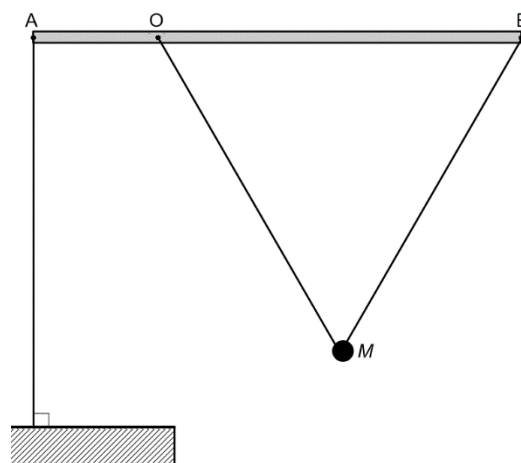
Ответ:

$$a = \frac{M - m}{M + m} g \sin \alpha - \left(\frac{2m}{M + m} \mu_1 + \mu_2 \right) g \cos \alpha \approx 0,54 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$



№	1.1 Действие	Максимальный балл
1	Участник приступил к решению задачи	1
2	Сделан верный поясняющий рисунок к задаче с указанием всех сил, действующих на доску и брусок	3
3	Применен третий закон Ньютона для сил трения и сил реакции опоры	2
4	Записаны уравнения движения	4
5	Использовано утверждение о нерастяжимости нити	2
6	Записаны формулы для сил трения	2
7	Верно решена система уравнений, получено ускорение	4
8	Получен правильный численный ответ	2
ВСЕГО		20

1.2. Задача. Однородный твердый стержень АВ массой m , может свободно вращаться вокруг закрепленной оси, проходящей через точку О, перпендикулярно плоскости чертежа (см. рис.). Точка О делит стержень в отношении 1: 3, считая от левого края. Вертикальная нить, прикреплённая к левому краю стержня А и неподвижной опоре, удерживает стержень в горизонтальном положении. Шарик массой $M = 6m$, подвешен на двух нитях, прикрепленных к оси вращения О и правому краю В стержня так, что центр шарика и точки крепления нитей образуют правильный треугольник. Система находится в равновесии. Нить, соединяющую шарик и ось вращения пережигают, шарик начинает совершать колебания в той же вертикальной плоскости, в которой он находился в состоянии равновесия. Найдите отношение максимальной силы натяжения вертикальной нити $(T_A)_{max}$ в процессе колебаний, к силе натяжения T_A этой нити в состоянии равновесия (до пережигания). Нити считать невесомыми и нерастяжимыми, размером шарика и сопротивлением воздуха пренебречь. Числовой ответ округлить до десятых долей.



1.2. Решение.

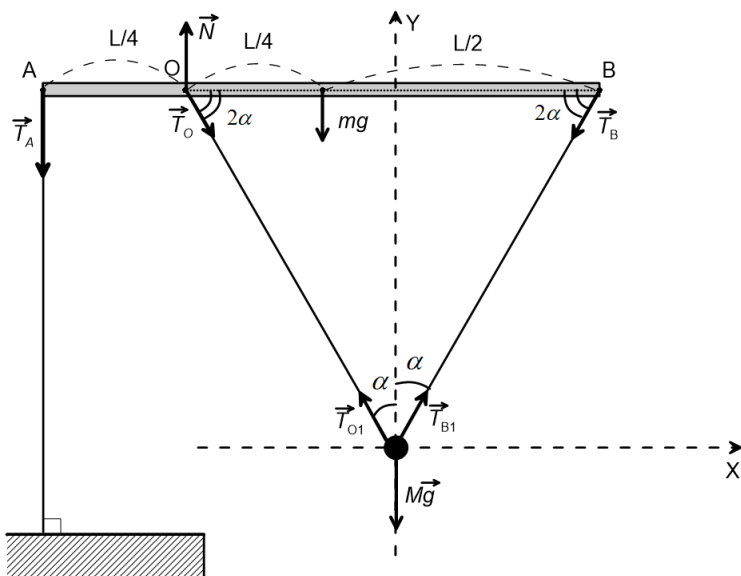


Рисунок 1.

где $\alpha = \pi/6$. Уравнение моментов, относительно оси, проходящей через точку О, примет вид:

$$T_A \cdot \frac{L}{4} = mg \cdot \frac{L}{4} + T_1 \cdot \frac{3L}{4} \sin(2\alpha); \Rightarrow T_A = mg + 3Mg \cdot \sin(\alpha),$$

Учитывая невесомость нитей, а также симметрию системы, можно сделать вывод, что силы натяжения нитей, на которых подвешен шарик М, равны друг другу по модулю:

$$|\vec{T}_O| = |\vec{T}_{O1}| = |\vec{T}_B| = |\vec{T}_{B1}| = T_1.$$

Записав второй закон Ньютона для шарика М в проекции на ось Y,

получим выражение:

$$Mg = 2T_1 \cos(\alpha) \Rightarrow T_1 = \frac{Mg}{2\cos(\alpha)},$$

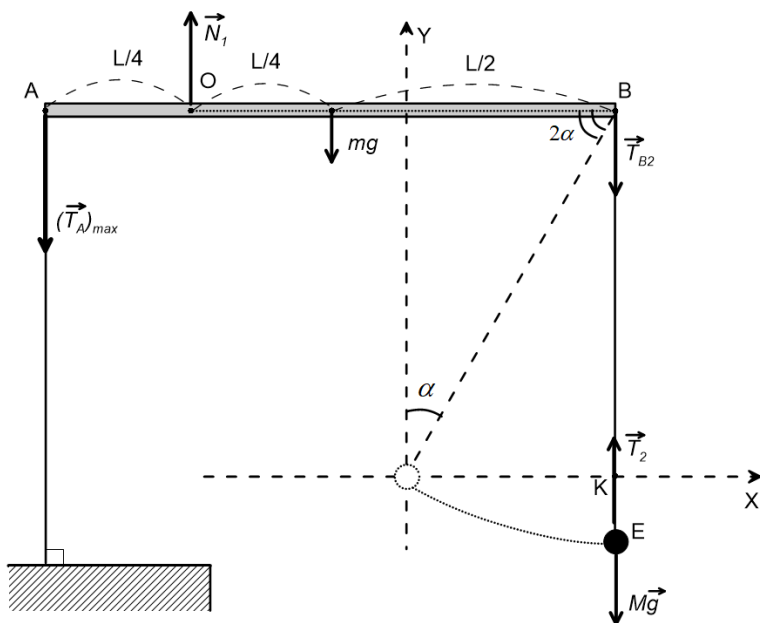


Рисунок 2.

где L – длина стержня АВ. После пережигания нити, шарик М будет двигаться по дуге окружности с центром в точке В и радиусом $3L/4$. Сила натяжения нити, прикрепленной к шарикау М, будет максимальна при его прохождении точки Е, когда нить займет вертикальное положение.

Скорость v шарика М в точке Е, может быть найдена из закона сохранения полной механической энергии:

$$\frac{Mv^2}{2} = Mg \frac{3}{4} L [1 - \cos(\alpha)]; \Rightarrow v = \sqrt{\frac{3}{2} gL [1 - \cos(\alpha)]}.$$

Тогда значение T_2 может быть получено из второго закона Ньютона, записанного в проекции на ось Y:

$$\frac{Mv^2}{3L/4} = T_2 - Mg; \Rightarrow T_2 = \frac{4M}{3L} \cdot \frac{3}{2} gL [1 - \cos(\alpha)] + Mg = Mg [3 - 2\cos(\alpha)].$$

Момент силы натяжения T_2 относительно оси О, в этом случае также будет максимальным. Поэтому будет максимальной и сила натяжения нити, прикрепленной к точке А стержня, которая может быть найдена из уравнения для моментов сил, относительно той же оси:

$$(T_A)_{max} \cdot \frac{L}{4} = mg \cdot \frac{L}{4} + T_2 \cdot \frac{3L}{4}.$$

С учетом, полученного выше выражения для T_2 :

$$(T_A)_{max} = mg + 3Mg [3 - 2\cos(\alpha)];$$

$$\frac{(T_A)_{max}}{T_A} = \frac{mg + 3Mg [3 - 2\cos(\alpha)]}{mg + 3Mg \cdot \sin(\alpha)} = \frac{mg + 3Mg [3 - \sqrt{3}]}{mg + 3Mg/2} = \frac{1 + 18(3 - \sqrt{3})}{10}.$$

Используя соотношения, приведенные условия получим следующую оценку:

$$\frac{(T_A)_{max}}{T_A} \approx 2,4.$$

Ответ: $\frac{(T_A)_{max}}{T_A} = \frac{1+18(3-\sqrt{3})}{10} \approx 2,4.$

№	1.2 Действие	Максимальный балл
1	Участник приступил к решению задачи	1
2	Сделан верный поясняющий рисунок к задаче с указанием всех сил, действующих на шарик и стержень	4
3	Сделано утверждение о равенстве сил натяжения нитей	1
4	Записано уравнение моментов и получено выражение для силы натяжения T_A	2
5	Сделано утверждение о том, что сила натяжения нити, прикрепленной к шарiku, будет максимальна при его прохождении нижней точки	2
6	Записан закон сохранения полной механической энергии и определена скорость шарика в нижней точке	2
7	Записан второй закон Ньютона для шарика в нижней точке	2
8	Записано уравнение моментов и получено выражение для силы натяжения $T_{A(max)}$	2
9	Получена искомая физическая величина	2
10	Получен правильный численный ответ	2
ВСЕГО		20

1.3. Задача. моль идеального одноатомного газа переводят из некоторого начального состояния в некоторое конечное состояние сначала изобарно, затем изохорно, и при этом к газу необходимо подвести количество теплоты Q . Минимальная температура газа при проведении этих двух процессов равна $T_{min} = 200\text{К}$. Если же перевести газ из того же начального в то же конечное состояние, сжав его адиабатически и уменьшив при этом его объем в 10 раз, то внешним силам придется совершить работу равную по модулю $A = 40\text{кДж}$. Найдите количество теплоты Q .

1.3. Решение:

Из условия задачи ясно, что сначала газ изобарно сжимается, здесь он отдает количество теплоты. Затем газ изохорно нагревается, где он получает количество теплоты. По первому закону термодинамики найдем количество теплоты, отданное газом в изобарном процессе:

$$Q_P = \Delta U_P + A_P = \frac{3}{2}\nu R(T_{min} - T_H) + \nu R(T_{min} - T_H) = \frac{5}{2}\nu R(T_{min} - T_H),$$

где ν - количество вещества газа, T_H - начальная температура газа. Данное количество теплоты является отрицательной величиной.

По первому закону термодинамики найдем количество теплоты, полученное газом в изохорном процессе:

$$Q_V = \Delta U_V + A_V = \frac{3}{2}\nu R(T_K - T_{min}),$$

где T_K - конечная температура газа.

Тогда общее подводимое количество теплоты будет равно:

$$Q = Q_V + Q_P = \nu R \left(T_{min} - T_H + \frac{3}{2}(T_K - T_H) \right). \quad (1)$$

По первому закону термодинамики модуль работы внешних сил при адиабатическом процессе равен:

$$A_{ад} = A = \frac{3}{2}\nu R(T_K - T_H). \quad (2)$$

С помощью уравнения Менделеева – Клапейрона получаем для двух состояний газа:

$$p_H V_H = \nu R T_H, p_H V_K = \nu R T_{min}.$$

Откуда

$$\frac{V_H}{V_K} = \frac{T_H}{T_{min}} \quad (3)$$

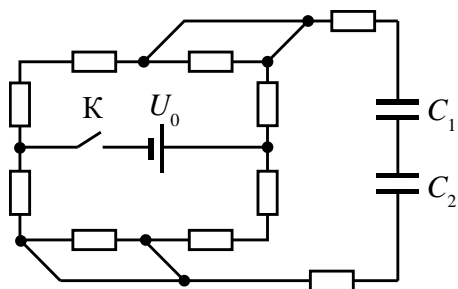
Объединяя уравнения (1), (2) и (3) и учитывая, что $V_H/V_K = 10$, получим:

$$Q = A - 9\nu R T_{min} = 40000 - 9 \cdot 2 \cdot 8,31 \cdot 200 \approx 10\text{кДж}.$$

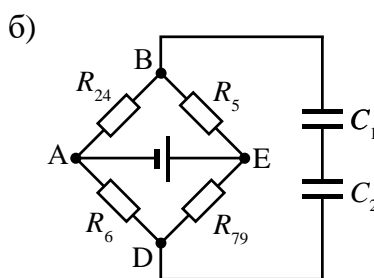
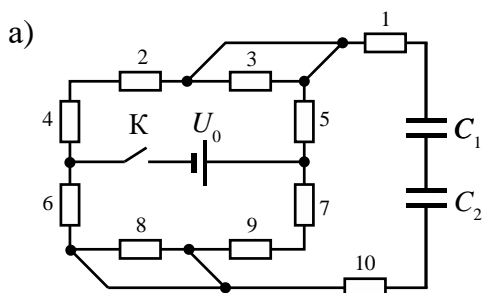
Ответ: $Q \approx 10\text{кДж}$.

№	1. 3 Действие	Максимальный балл
1	Участник приступил к решению задачи	1
2	Сделан верный поясняющий рисунок к задаче	2
3	Определено количество теплоты, отданное газом в изобарном процессе:	3
4	Найдено количество теплоты, полученное газом в изохорном процессе	2
5	Определено общее подводимое количество теплоты	2
6	Найдена работа внешних сил при адиабатическом процессе	2
7	Применено уравнение Менделеева – Клапейрона	2
8	Верно определена искомая физическая величина	4
9	Получен правильный численный ответ	2
ВСЕГО		20

1.4. Задача В схеме, представленной на рисунке, идеальный источник имеет напряжение $U_0 = 5$ В. Сопротивления всех резисторов одинаковы, сопротивлением проводов можно пренебречь. Емкости конденсаторов $C_1 = 4$ нФ и $C_2 = 6$ нФ. Найти энергию электрического поля в конденсаторе C_1 через длительное время после замыкания ключа К. До замыкания ключа конденсаторы C_1 и C_2 были не заряжены.



1.4. Решение:



Обозначим резисторы цифрами, см. рис. а. Резисторы 3, 8 шунтированы проводником, следовательно, можно считать что ток через них протекать не будет и их можно удалить из схемы. Через длительное время после замыкания ключа конденсаторы зарядятся и ток через резисторы 1, 10 протекать не будет. Следовательно, падение напряжения на этих резисторах будет равно нулю и их в схеме можно заменить проводниками. В результате получается эквивалентная схема, изображенная на рис. б, где сопротивления резисторов

$$R_{24} = R_{79} = 2R,$$

$$R_5 = R_6 = R.$$

Ток через резисторы R_{24} и R_5 будет равен:

$$I_1 = \frac{U_0}{R_{24} + R_5} = \frac{U_0}{3R}.$$

Напряжение между точками А и В будет равно:

$$U_{AB} = I_1 R_{24} = \frac{2U_0}{3}.$$

Ток через резисторы R_6 и R_{79} будет равен:

$$I_2 = \frac{U_0}{R_6 + R_{79}} = \frac{U_0}{3R}.$$

Напряжение между точками А и D:

$$U_{AD} = I_2 R_6 = \frac{U_0}{3}.$$

Напряжение между точками В и D:

$$U_{BD} = U_{AB} - U_{AD} = \frac{U_0}{3}.$$

Конденсаторы соединены последовательно, поэтому их общая емкость равна:

$$C_{\text{общ}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

Заряд на каждом из конденсаторов:

$$q = U_{BD} C_{\text{общ}} = \frac{C_1 C_2 U_0}{3(C_1 + C_2)}$$

Искомая энергия электрического поля в конденсаторе C_1 равна:

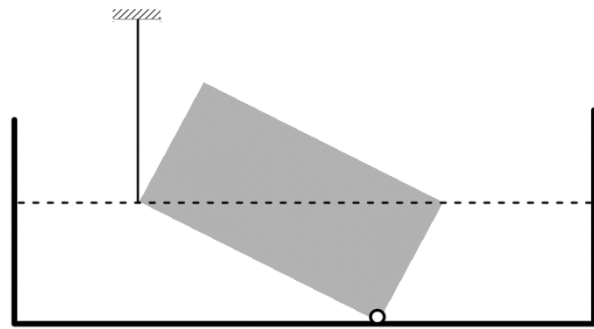
$$W_C = \frac{q^2}{2C_1} = \left(\frac{C_1 C_2 U_0}{3(C_1 + C_2)} \right)^2 \cdot \frac{1}{2C_1} = \left(\frac{4 \cdot 10^{-9} \cdot 6 \cdot 10^{-9} \cdot 5}{3(4 \cdot 10^{-9} + 6 \cdot 10^{-9})} \right)^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 10^{-9}} = 2 \text{ нДж}.$$

Ответ:

$$W_C = 2 \text{ нДж}.$$

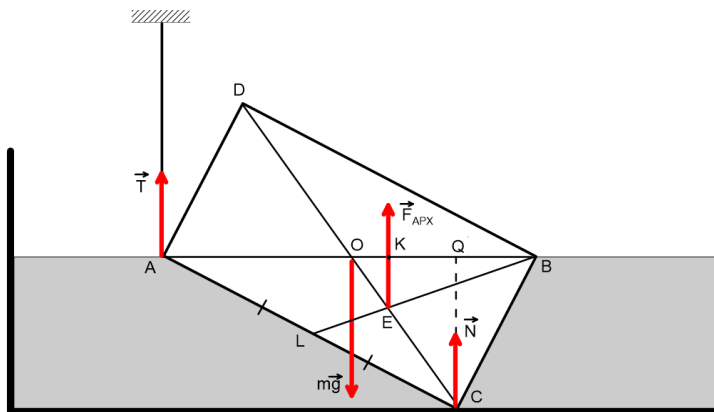
№	1.4 Действие	Максимальный балл
1	Участник приступил к решению задачи	1
2	Получена (с объяснением) эквивалентная схема	5
3	Определены необходимые для решения задачи силы тока через резисторы и напряжения.	4
4	Определен заряд каждого из конденсаторов	4
5	Получена формула для энергии конденсаторов	4
6	Получен правильный численный ответ	2
ВСЕГО		20

1.5. Задача. Однородная алюминиевая деталь имеет форму прямоугольного параллелепипеда со сторонами, относящимися как $1:1:\sqrt{15}$. Одно из ее меньших ребер шарнирно прикреплено к плоскому дну достаточно большой кюветы. С помощью вертикальной нити, прикрепленной к другому ребру, деталь удерживается в равновесии так, что диагональное сечение детали остается горизонтальным (пунктирная прямая на рисунке). В кювету начинают медленно наливать масло. Определить отношение силы натяжения нити в момент, когда свободная поверхность масла достигла указанного пунктиром на рисунке уровня горизонтального сечения, и силы натяжения нити в сухой кювете. Считать плотность масла в три раза меньшей плотности алюминия, нить – невесомой и нерастяжимой. Пренебречь объемом шарнира и трением в нем.



В кювету начинают медленно наливать масло. Определить отношение силы натяжения нити в момент, когда свободная поверхность масла достигла указанного пунктиром на рисунке уровня горизонтального сечения, и силы натяжения нити в сухой кювете. Считать плотность масла в три раза меньшей плотности алюминия, нить – невесомой и нерастяжимой. Пренебречь объемом шарнира и трением в нем.

1.5. Решение.



На деталь, погруженную в масло, действуют силы: натяжения нити \vec{T} , тяжести $m\vec{g}$ (приложена к центру параллелепипеда O), сила реакции опоры \vec{N} , сила Архимеда $\vec{F}_{\text{АрХ}}$ (приложена к точке пересечения медиан треугольника ABC).

Так как $ABCD$ – прямоугольник, а AB и DC – его диагонали, то $AO = OC = OB = x$, $AB = 2x$. Применяя теорему Пифагора к ΔABC , получаем $BC = x/2$. Из ΔOBC , используя теорему косинусов, найдем $\cos(\angle BOC) = 7/8$ и $OQ = x \cdot \cos(\angle BOC) = 7x/8$. Согласно свойству медиан $OE:EC = 1:2$, тогда $OK = x/3 \cdot \cos(\angle BOC) = 7x/24$, $KQ = OQ - OK = 7x/12$.

Запишем уравнение моментов сил, действующих на деталь, относительно оси, проходящей через точку C, перпендикулярно плоскости чертежа:

$$T \cdot AQ + F_{\text{АрХ}} \cdot KQ = mg \cdot OQ.$$

Пусть ρ – плотность масла, V – объем детали, тогда $m = 3\rho V$, $F_{\text{АрХ}} = \rho g V/2$. Выражая плечи сил через x получим:

$$T \cdot \frac{15x}{8} + \rho g \frac{V}{2} \cdot \frac{7x}{12} = 3\rho V g \cdot \frac{7x}{8}.$$

Откуда $T = \frac{56}{45} \rho g V$.

В отсутствии масла в кювете, уравнение моментов примет вид:

$$T_0 \cdot \frac{15x}{8} = 3\rho Vg \cdot \frac{7x}{8},$$

где T_0 - сила натяжения в отсутствие масла в кювете. Тогда $T = \frac{7}{5}\rho gV$ и

$$\frac{T}{T_0} = \frac{8}{9}.$$

Ответ: 8/9.

№	1.5 Действие	Максимальный балл
1	Участник приступил к решению задачи	1
2	Сделан верный поясняющий рисунок к задаче с указанием всех сил, действующих на параллелепипед	4
3	Верно определены плечи сил	3
4	Записано уравнение моментов в случае сухой кюветы	3
5	Записано уравнение моментов для случая кюветы с маслом	3
6	Получена искомая физическая величина	4
7	Получен правильный численный ответ	2
ВСЕГО		20