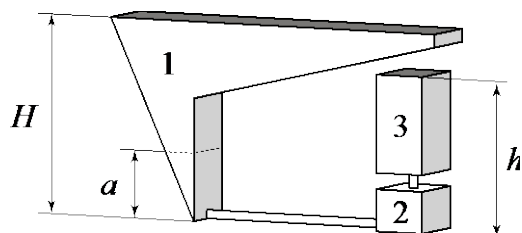


7-9 классы задача 1.1. (решение)

1.1. Задача. Школьник напечатал фигуру сложной формы на 3D принтере из прозрачного пластика (см. рис.). Она состоит из трех полых сосудов с тонкими стенками, соединенных полыми трубками. По данным трубкам жидкость может свободно циркулировать из сосуда в сосуд. Сосуды 1 и 3 сверху открыты. Фигуру школьник заполнил двумя несмешивающимися жидкостями следующим образом. Сосуды 3 и 2 полностью, соединительные трубки, а также часть сосуда 1 (от нижнего края фигуры до уровня a) заполнены глицерином. Оставшаяся часть сосуда 1 (от уровня a до уровня H) заполнена водой с плотностью $\rho_1 = 1000 \text{ кг/м}^3$ до верха. При этом система оказалась устойчивой: ни вода, ни глицерин не вытекали сверху из сосудов. Найдите высоту уровня a , если плотность глицерина $\rho_2 = 1260 \text{ кг/м}^3$, высоты сосудов: $h = 114 \text{ мм}$, $H = 140 \text{ мм}$. Ответ выразите в миллиметрах.



1.1.Решение.

Давление жидкости вблизи дна сосуда 2:

$$P_2 = \rho_2 g h.$$

Давление жидкости вблизи дна сосуда 1 складывается из давления столба глицерина и столба воды:

$$P_1 = \rho_2 g a + \rho_1 g (H - a),$$

где ρ_1 — плотность воды. Сосуды являются сообщающимися, следовательно на уровне дна давления должны быть равны.

$$P_1 = P_2,$$

$$\rho_2 g h = \rho_2 g a + \rho_1 g (H - a).$$

Решая это уравнение, получаем выражение для высоты уровня a :

$$a = \frac{\rho_2 h - \rho_1 H}{\rho_2 - \rho_1},$$

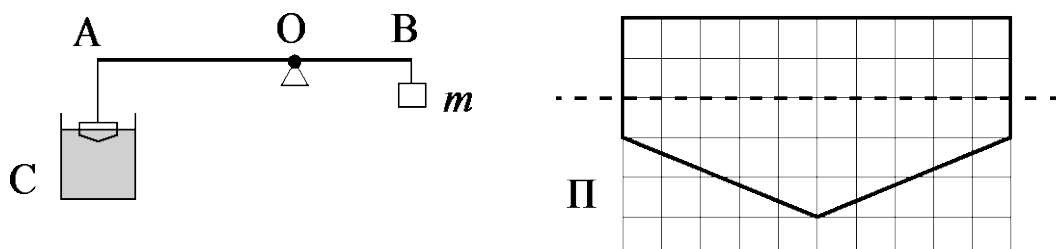
Подставляя известные числовые значения, получаем:

$$a = \frac{1260 \cdot 114 \cdot 10^{-3} - 1000 \cdot 140 \cdot 10^{-3}}{1260 - 1000} = 14 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 14 \text{ мм}.$$

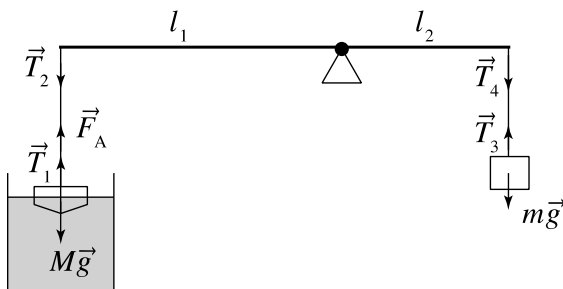
Ответ: $a = 14 \text{ мм}$.

7-9 классы задача 1.2. (решение)

1.2. Задача. На концах невесомого жесткого стержня АВ подвешены на невесомых нитях поплавок и груз массой $m = 700$ г. Поплавок П находится в сосуде С с водой плотностью $\rho = 1000$ кг/м³ и имеет профиль, изображенный на рисунке, где сторона одной клетки $a = 1$ см, пунктиром отмечен уровень воды. Профиль не изменяется в направлении, перпендикулярном плоскости рисунка, в этом направлении длина полавка равна $10a$. Стержень может вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси О и находится в равновесии. Найдите плотность полавка, если плечи стержня $AO = l_1 = 50$ см, $OB = l_2 = 10$ см. Ответ выразите в кг/м³.



1.2. Решение.



Согласно рисунку общий объем полавка равен:

$$V = 10 \cdot 10 \cdot 3 a^3 + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 2 \cdot 10 a^3 = 400 a^3 = 400 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Объем погруженной в воду части полавка согласно аналогичным расчетам с использованием рисунка составляет:

$$V_{\text{п}} = 200 a^3 = 200 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Масса полавка $M = \rho_{\text{т}} V$, где $\rho_{\text{т}}$ – его плотность. На поплавок действует направленная вертикально вверх сила Архимеда, равная: $F_{\text{А}} = \rho_{\text{в}} V_{\text{п}} g$, где $\rho_{\text{в}}$ – плотность воды, g – ускорение свободного падения. Модули сил натяжения нитей попарно равны: $T_1 = T_2$ и $T_3 = T_4$.

Запишем второй закон Ньютона для полавка в проекции на вертикальную ось:

$$0 = T_1 + F_A - Mg,$$

Отсюда получаем, что $T_1 = \rho_{\text{т}} V g - \rho_{\text{в}} g V_{\text{п}}$. Запишем второй закон Ньютона для груза в проекции на вертикальную ось:

$$0 = T_3 - mg.$$

Отсюда $T_3 = mg$. Момент силы, вращающей рычаг против часовой стрелки равен:

$$M_1 = T_2 l_1 = l_1 g (\rho_{\text{т}} V - \rho_{\text{в}} V_{\text{п}}).$$

Момент силы, вращающей рычаг по часовой стрелке равен:

$$M_2 = T_4 l_2 = l_2 mg.$$

Условие равновесия:

$$M_1 = M_2.$$

Решая последнее уравнение с учетом выражений, записанных ранее получим, что искомая плотность поплавка будет равна:

$$\rho_{\text{т}} = \frac{l_2 m + l_1 \rho_{\text{в}} V_{\text{п}}}{l_1 V}.$$

Подставляя известные числовые значения, получим:

$$\rho_{\text{т}} = \frac{0,1 \cdot 0,7 + 0,5 \cdot 1000 \cdot 200 \cdot 10^{-6}}{0,5 \cdot 400 \cdot 10^{-6}} = 850 \text{ кг/м}^3.$$

Ответ: $\rho_{\text{т}} = 850 \text{ кг/м}^3$.

7-9 классы задача 1.3. (решение)

1.3. Задача. Баба Зина в холодный зимний день решила попить чай с малиновым вареньем. Она налила в свой старый электрический чайник воду массой $m = 2\text{ кг}$ прикомнатной температурой $t_0 = 20^\circ\text{C}$ и начала нагревать его содержимое. Однако, нагрев воду до $t_1 = 60^\circ\text{C}$ за время $\tau_1 = 2,5\text{ мин}$, ее старый чайник неожиданно сломался. Оставив воду остывать в старом чайнике, баба Зина за $\tau_2 = 10\text{ мин}$ сбегала в ближайший магазин и купила новый электрический чайник с вдвое большей мощностью. Быстро перелив воду из старого чайника в новый чайник, она довела воду до кипения за $\tau_3 = 2\text{ мин}$ и приготовила себе чай с малиновым вареньем. Пока баба Зина бегала в магазин вода в старом чайнике отдавала тепло в окружающую среду со средней скоростью $q = 400\text{ Дж/с}$. Найти КПД η_2 нового чайника, если КПД старого чайника равен $\eta_1 = 80\%$. Температура кипения воды равна $t_{100} = 100^\circ\text{C}$. Удельная теплоемкость воды равна $c = 4200\text{ Дж/(кг} \cdot ^\circ\text{C)}$. При расчетах теплоемкостями чайников пренебречь.

1.3. Решение.

КПД чайника η можно определить как отношение количества теплоты, необходимого для нагревания воды, к затраченной работе A , где $A = N\tau$ (N - мощность чайника, τ - время его работы).

Запишем уравнение теплового баланса для нагревания воды в старом чайнике:

$$N\tau_1\eta_1 = cm(t_1 - t_0). \quad (1)$$

Запишем уравнение теплового баланса для нагревания воды в новом чайнике:

$$2N\tau_3\eta_2 = cm(t_{100} - t_1^*), \quad (2)$$

где t_1^* - температура воды в старом чайнике, до которой остыла вода, пока баба Зина бегала в магазин.

Во время отсутствия бабы Зины вода в старом чайнике отдавала количество теплоты в окружающую среду (при этом она охладилась до температуры t_1^*):

$$q\tau_2 = cm(t_1 - t_1^*). \quad (3)$$

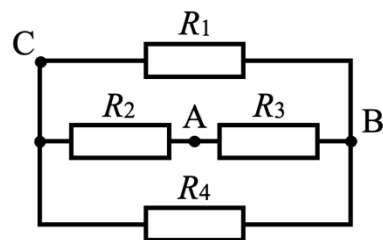
Из формул (1-3) получим:

$$\eta_2 = \frac{\tau_1\eta_1}{2\tau_3(t_1 - t_0)} \cdot \left[t_{100} - t_1 + \frac{q\tau_2}{cm} \right] =$$
$$\frac{2,5 \cdot 60 \cdot 0,8}{2 \cdot 2 \cdot 60 \cdot (60 - 20)} \cdot \left[100 - 60 + \frac{400 \cdot 600}{4200 \cdot 2} \right] \approx 0,86 \text{ (86\%)}.$$

Ответ: $\eta_2 \approx 0,86 \text{ (86\%)}$.

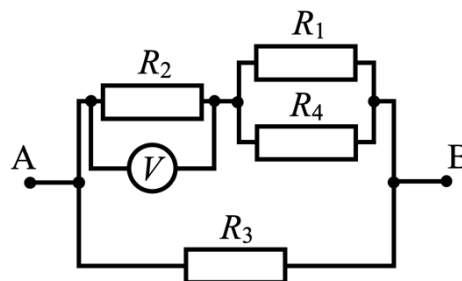
7-9 классы задача 1.4. (решение)

1.4. Задача. В электрической схеме, показанной на рисунке, сопротивления резисторов равны $R_1 = R$, $R_2 = 1,25R$ и $R_3 = R_4 = 3R$. К клеммам А и В подключили источник постоянного напряжения $U = 32$ В. Какое напряжение покажет идеальный вольтметр, подключенный между клеммами А и С?



1.4. Решение. Эквивалентная схема для цепи, данной в условии задачи, показана на рисунке. Резисторы R_1 и R_4 соединены параллельно, их общее сопротивление равно:

$$R_{14} = \frac{R_1 R_4}{R_1 + R_4} = \frac{R \cdot 3R}{R + 3R} = 0,75R.$$



Суммарное напряжение на участке с резисторами R_2, R_1 и R_4 равно

$$U_2 + U_{14} = U = 32 \text{ В.}$$

Сила тока I_2 , протекающего через резистор R_2 равна суммарной силе тока, протекающего через резисторы R_1 и R_4 . Тогда в соответствии с законом Ома получаем:

$$I_2 = \frac{U_2}{R_2} = \frac{U_{14}}{R_{14}} \Rightarrow \frac{U_2}{1,25R} = \frac{U_{14}}{0,75R} \Rightarrow \frac{U_2}{U_{14}} = \frac{5}{3}.$$

Так как идеальный вольтметр подключен параллельно к резистору R_2 , решая полученную систему уравнений окончательно получаем:

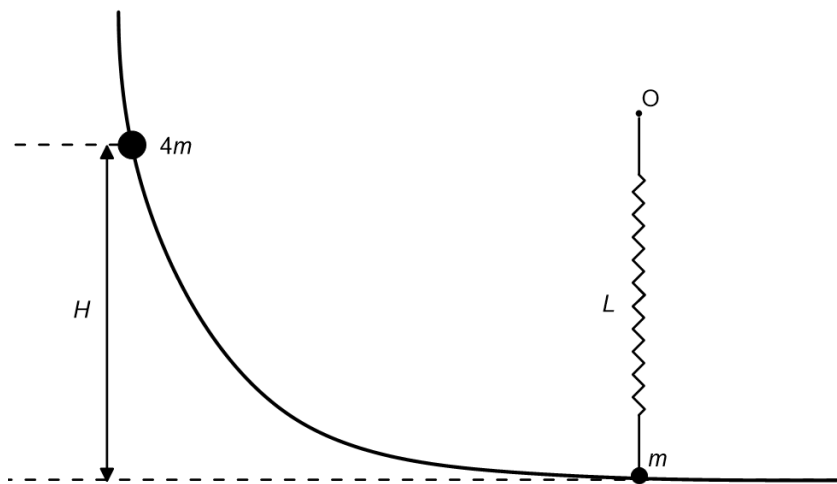
$$U_V = U_2 = \frac{5}{8} U = 20 \text{ В.}$$

Ответ:

$$U_V = \frac{5}{8} U = 20 \text{ В.}$$

7-9 классы задача 1.5. (решение)

Задача 1.5. Бусинка массой $4m$, надетая на гладкий изогнутый стержень, начинает движение из состояния покоя. Стержень расположен в вертикальной плоскости так, как показано на рисунке. На горизонтальную часть стержня надета другая бусинка массой $m = 0,01$ кг, прикрепленная к невесомой, недеформированной пружине. Пружина расположена вертикально и может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку подвеса O . Жесткость пружины $k = 10$ Н/м, ее длина $L = 0,1$ м. Найти наименьшую высоту H точки начала движения бусинки $4m$, при которой сила давления на стержень со стороны бусинок достигнет нулевого значения. Считать, что бусинки претерпевают абсолютно неупругое соударение, горизонтальную часть стержня – достаточно длинной, а деформацию пружины – упругой. Силой трения пренебречь. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с².



1.5. Решение.

Согласно закону сохранения полной механической энергии

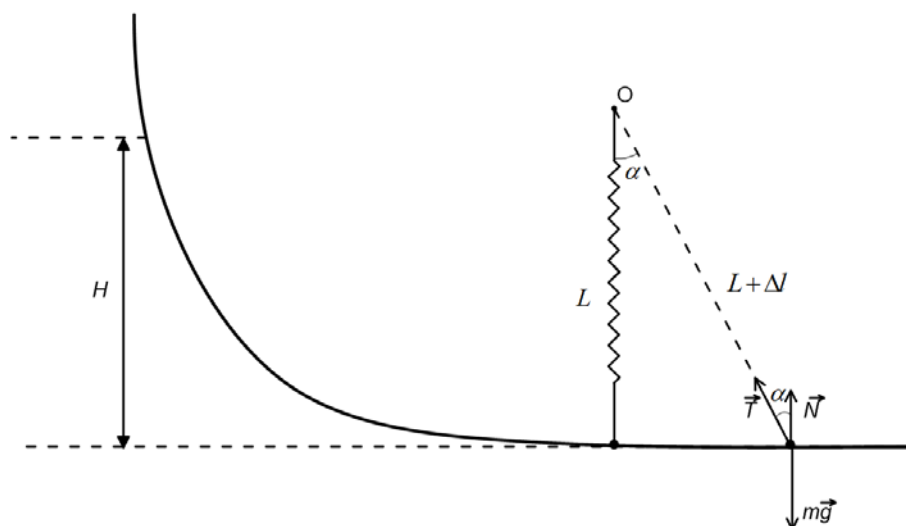
$$4mgH = \frac{4mV_1^2}{2}; \Rightarrow V_1 = \sqrt{2gH};$$

где V_1 – скорость бусинки $4m$ непосредственно перед ударом о бусинку m .

При абсолютно неупругом соударении бусинок выполняется закон сохранения импульса:

$$4mV_1 = (m + 4m)V_2; \Rightarrow V_2 = \frac{4}{5}V_1 = \frac{4}{5}\sqrt{2gH}$$

Здесь V_2 – скорость бусинок сразу после соударения.



В процессе движения по горизонтальному участку стержня на бусинки действует сила тяжести $5mg$, сила упругости пружины T и сила реакции опоры N , которая согласно третьему закону Ньютона равна по модулю силе давления P бусинок на стержень. Таким образом, равенство нулю силы P достигается при $N=0$. В этом случае, согласно второму закону Ньютона, имеем равенство:

$$T \cos \alpha = 5mg \quad (1)$$

где

$$T = k \Delta l \quad (2)$$

$$\cos \alpha = \frac{L}{L + \Delta l} \quad (3)$$

Условие минимальности высоты H , приводит к требованию равенства нулю скорости V_3 в момент достижения силы P нулевого значения. Тогда из закона сохранения энергии получаем соотношение:

$$\begin{aligned} \frac{5mV_2^2}{2} &= \frac{k\Delta l^2}{2} + \frac{5mV_3^2}{2}; \Rightarrow \\ \Delta l &= \sqrt{\frac{5m}{k} (V_2^2 - V_3^2)} = \sqrt{\frac{5m}{k}} V_2 = 4 \sqrt{\frac{2gHm}{5k}}; \end{aligned} \quad (4)$$

Решая систему уравнений (1)-(4), получаем окончательно:

$$H = \frac{125}{32} \frac{k}{mg} \left(\frac{mgL}{kL - 5mg} \right)^2 = \frac{125}{32} \frac{10}{0,01 \cdot 10} \left(\frac{0,01 \cdot 10 \cdot 0,1}{10 \cdot 0,1 - 5 \cdot 0,01 \cdot 10} \right)^2 \approx 16 \text{ см.}$$

Ответ: $H \approx 16 \text{ см.}$