Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Заключительный этап 2023/24 учебного года для 11 класса

Задача 1

В-1 Болельщики должны выбрать 6 лучших хоккеистов чемпионата: одного вратаря, двух защитников и трех нападающих. Среди претендентов: 3 вратаря, 5 защитников, 6 нападающих и 3 «универсала». «Универсал» — игрок, хороший в разных ролях, который поэтому может быть выбран как в качестве защитника, так в качестве нападающего (но не вратаря). Сколько существует способов выбрать эту шестерку? Требуется получить числовое значение.

Ответ: 5355

Решение. С выбором вратаря проблем нет: $C_3^1 = 3$ способа. При выборе защитника есть 3 возможности: а) оба защитника выбираются из 5-ти защитников: $C_5^2 = (5 \cdot 4)/2 = 10$; тогда при выборе нападающих есть $6 + 3 = 9$ претендентов; б) один защитник выбирается из 5-ти защитников, а второй из 3-х «универсалов»; тогда при выборе нападающих есть $6 + 2 = 8$ претендентов; в) оба защитника выбираются из 3-х «универсалов»; тогда при выборе нападающих есть $6 + 1 = 7$ претендентов. Таким образом, общее количество вариантов равно:

$$C_3^1(C_5^2 \cdot C_9^3 + C_5^1 \cdot C_3^1 \cdot C_8^3 + C_3^2 \cdot C_7^3) =$$

$$= 3 \cdot \left(\frac{(5 \cdot 4)}{2} \cdot \frac{(9 \cdot 8 \cdot 7)}{(2 \cdot 3)} + 5 \cdot 3 \cdot \frac{(8 \cdot 7 \cdot 6)}{(2 \cdot 3)} + \frac{(3 \cdot 2)}{2} \cdot \frac{(7 \cdot 6 \cdot 5)}{(2 \cdot 3)}\right) =$$

$$= 3 \cdot 7 \cdot 5 \cdot (3 \cdot 8 + 8 \cdot 3 + 3) = 105 \cdot (24 + 24 + 3) = 5355.$$

В-2 Болельщики должны выбрать 6 лучших хоккеистов чемпионата: одного вратаря, двух защитников и трех нападающих. Среди претендентов: 3 вратаря, 4 защитника, 7 нападающих и 3 «универсала». «Универсал» — игрок, хороший в разных ролях, который поэтому может быть выбран как в качестве защитника, так в качестве нападающего (но не вратаря). Сколько существует способов выбрать эту шестерку? Требуется получить числовое значение.

Ответ: 5688

В-3 Болельщики должны выбрать 6 лучших хоккеистов чемпионата: одного вратаря, двух защитников и трех нападающих. Среди претендентов: 2 вратаря, 5 защитников, 6 нападающих и 3 «универсала». «Универсал» — игрок, хороший в разных ролях, который поэтому может быть выбран как в качестве защитника, так в качестве нападающего (но не вратаря). Сколько существует способов выбрать эту шестерку? Требуется получить числовое значение.

Ответ: 3570

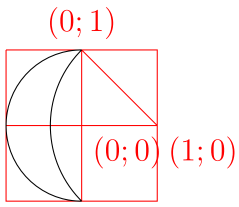
В-4 Болельщики должны выбрать 6 лучших хоккеистов чемпионата: одного вратаря, двух защитников и трех нападающих. Среди претендентов: 2 вратаря, 4 защитника, 7 нападающих и 3 «универсала». «Универсал» — игрок, хороший в разных ролях, который поэтому может быть выбран как в качестве защитника, так в качестве нападающего (но не вратаря). Сколько существует способов выбрать эту шестерку? Требуется получить числовое значение.

Ответ: 3792

Задача 2

В-1

Живописец закрасил акварелью полумесяц на клетчатой бумаге. Контур полумесяца состоит из двух дуг — одна от окружности с центром в $(0;0)$, проходящей через $(0;1)$, другая — от окружности с центром в $(1;0)$, проходящей через $(0;1)$.

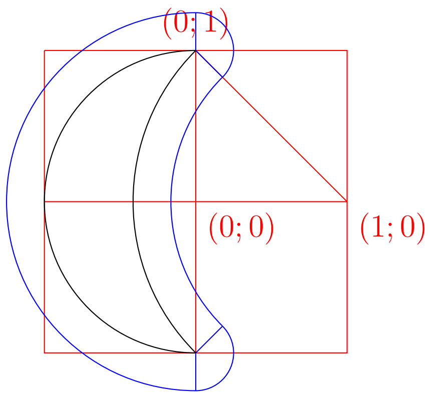


К утру краска расплылась так, что каждая точка полумесяца превратилась в круг радиуса 0.5. Найдите площадь получившейся фигуры.

Ответ:

$$1+\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

Решение. Пусть рисунок расплылся на радиус r. К площади полумесяца прибавятся «поля», которые можно разбить на левое, правое и два закругления на концах рогов.



Площадь полумесяца равна половине площади круга радиуса 1 минус сегмент круга радиуса $\sqrt{2}$.

$$\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi-4}{4}=1.$$

Площадь левого поля — половина от площади кольца с радиусами 1 и $1+r$.

$$\frac{\pi(1+r)^2-\pi}{2}.$$

Площадь правого поля — четверть от площади кольца с радиусами $\sqrt{2}$ и $\sqrt{2}-r$.

$$\frac{\pi(\sqrt{2})^2-\pi(\sqrt{2}-r)^2}{4}.$$

Закругления на концах рогов вместе составляют три четверти окружности радиуса r.

$$\frac{3}{4}\pi r^2.$$

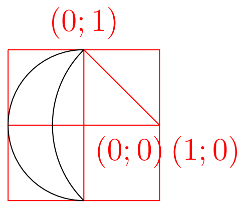
Вместе получается:

$$1+\frac{\pi(1+r)^2-\pi}{2}+\frac{\pi(\sqrt{2})^2-\pi(\sqrt{2}-r)^2}{4}+\frac{3}{4}\pi r^2=$$

$$=1+\pi r+\frac{\pi}{2}r^2+\frac{\pi\sqrt{2}r}{2}-\frac{\pi}{4}r^2+\frac{3\pi}{4}r^2=1+\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\pi r+\pi r^2$$

В-2

Живописец закрасил акварелью полумесяц на клетчатой бумаге. Контур полумесяца состоит из двух дуг — одна от окружности с центром в $(0; 0)$, проходящей через $(0; 1)$, другая — от окружности с центром в $(1; 0)$, проходящей через $(0; 1)$.



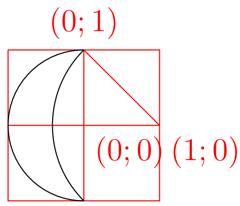
К утру краска расплылась так, что каждая точка полумесяца превратилась в круг радиуса 0.25. Найдите площадь получившейся фигуры.

Ответ:

$$1 + \frac{5\pi}{16} + \frac{\pi\sqrt{2}}{8}$$

В-3

Живописец закрасил акварелью полумесяц на клетчатой бумаге. Контур полумесяца состоит из двух дуг — одна от окружности с центром в $(0; 0)$, проходящей через $(0; 1)$, другая — от окружности с центром в $(1; 0)$, проходящей через $(0; 1)$.



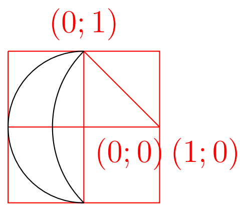
К утру краска расплылась так, что каждая точка полумесяца превратилась в круг радиуса $1/3$. Найдите площадь получившейся фигуры.

Ответ:

$$1 + \frac{4\pi}{9} + \frac{\pi\sqrt{2}}{6}$$

В-4

Живописец закрасил акварелью полумесяц на клетчатой бумаге. Контур полумесяца состоит из двух дуг — одна от окружности с центром в $(0; 0)$, проходящей через $(0; 1)$, другая — от окружности с центром в $(1; 0)$, проходящей через $(0; 1)$.



К утру краска расплылась так, что каждая точка полумесяца превратилась в круг радиуса $\sqrt{2}/2$. Найдите площадь получившейся фигуры.

Ответ:

$$1 + \pi + \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

Задача 3

В-1 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (xy-3+3x-y)|y-x-9| = (x-4)|xy-3+3x-y|, \\ \sqrt{y-x+9} = y-4. \end{cases}$$

Ответ: $(1,8), (-59,13)$.

Решение.

Из второго уравнения следует, что $y \geqslant 4$, так как корень неотрицателен.

Пусть первое уравнение выполняется из-за того, что $(xy-3+3x-y)=0$. Условие равносильно $(x-1)(y+3)=0$. Решение $y=-3$ не подходит. При $x=1$ получаем

$$\sqrt{y+8} = y-4 \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 4, \\ y^2-9y+8=0. \end{cases} \Leftrightarrow y=8$$

Пусть теперь $(xy-3+3x-y) \neq 0$, но $(x-4)=0$, и $(y-x-9)=0$. Тогда $x=4$, $y=13$, но такой вариант не подходит под второе уравнение. При остальных x, y исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} (x-1)(y+3)(x-4) > 0, \\ y-x-9 = \pm(x-4), \\ \sqrt{y-x+9} = y-4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(y+3)(x-4) > 0, \\ y=13 \text{ или } y=2x+5, \\ \sqrt{y-x+9} = y-4. \end{cases}$$

При $y=13$ решением будет $x=-59$, при $y=2x+5$ получим уравнение

$$\sqrt{x+14} = 2x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -0,5, \\ 4x^2+3x-13=0. \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-3+\sqrt{217}}{8}, \text{ откуда } y = \frac{17+\sqrt{217}}{4}.$$

Последняя пара не удовлетворяет условию $(x-1)(y+3)(x-4) > 0$.

В-2 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (xy+3x-2y-6)|y-x-8| = (x-5)|xy+3x-2y-6|, \\ \sqrt{y-x+10} = y-4. \end{cases}$$

Ответ: $(2,8), (-58,13)$.

В-3 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (xy+4x-y-4)|y-x-8| = (x-4)|xy+4x-y-4|, \\ \sqrt{y-x+10} = y-3. \end{cases}$$

Ответ: $(1,7), (-59,12)$.

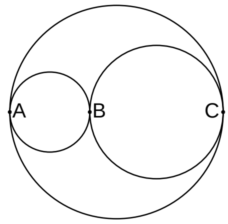
В-4 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (xy+2x-y-2)|y-x-10| = (x-4)|xy+2x-y-2|, \\ \sqrt{y-x+8} = y-5. \end{cases}$$

Ответ: $(1,9), (-59,14)$.

Задача 4

В-1



Автодром состоит из трех попарно касающихся кольцевых трасс (см. рисунок). Автомобиль в любой точке касания может продолжать движение по любой из двух возможных трасс, но нигде не может разворачиваться на 180^o. По каждой из трех трасс автомобиль едет со своей скоростью, так что любую из дуг AB длиной 15 км он проезжает за 7 минут, любую из дуг BC длиной 25 км — за 11 минут, а любую из дуг AC — за 17 минут. Выехав из точки A, автомобиль через 1 час 25 минут оказался в ней же. Сколько километров проехал автомобиль?

Ответ: 190

Решение. Рассмотрим варианты, которыми находящийся в точке A автомобиль может в следующий раз впервые снова оказаться в этой точке.

Во-первых, можно сделать это, не проходя через точку C, т. е. путем ABA.

Во-вторых, можно одним из двух способов (AC или ABC) добраться до точки C, сделать несколько кругов CBC («несколько» может быть и нулем) и вернуться одним из двух способов (CA или CBA) в точку A.

В любом случае мы либо четное число раз проезжаем по 7-минутной дуге, четное число раз по 11-минутной и четное число раз по 17-минутной, либо наоборот, нечетное число раз по каждому из трех типов дуг.

То же самое можно сказать про неоднократное возвращение в точку A.

«Четный» случай нам не подходит, так как по условию на каждую дугу уходит целое число минут, а общее время выражается в минутах нечетным числом.

Заметим, что любая тройка нечетных положительных чисел может быть реализована в качестве числа проходов (в любом направлении) дуг 1) AB, 2) BC, 3) AC. Действительно, выехав из точки A и сделав заданное нечетное число проходов AB, мы окажемся в точке B, после чего, сделав заданное нечетное число проходов BC, мы окажемся в точке C, а после заданного нечетного числа проходов AC — снова в точке A.

Итак, попробуем найти три таких нечетных положительных числа i, j, k, что

$$7i + 11j + 17k = 60 + 25 = 85.$$

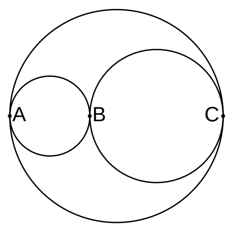
Для k возможны 3 варианта: 5, 3, 1.

Первый случай отбрасываем, так как для него получаем $i = j = 0$.

Во втором случае имеем $7i + 11j = 34$. Если $j \geq 3$, то $i < 1$. При $j = 1$ число $34 - 11 \cdot 1 = 23$ не делится на 7.

Наконец, при $k = 1$ имеем $7i + 11j = 68$. Для $j = 5, 3, 1$ получим $7i = 13, 35, 57$, откуда $j = 3, i = 35 : 7 = 5$, а пройденный путь равен $15 \cdot 5 + 25 \cdot 3 + 40 \cdot 1 = 190$ (км). Здесь 40=15+25 — длина дуги AC, которую находим геометрически. ($AC = \pi R = \pi(r_1 + r_2) = \pi r_1 + \pi r_2 = AB + BC$, где R, r_1, r_2 — радиусы.)

В-2

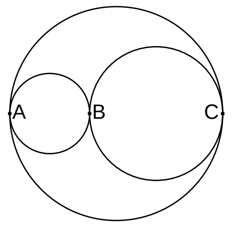


Автодром состоит из трех попарно касающихся кольцевых трасс (см. рисунок). Автомобиль в любой точке касания может продолжать движение по любой из двух возможных трасс, но нигде не может разворачиваться на 180^o. По каждой из трех трасс автомобиль едет со своей скоростью, так что любую из дуг AB длиной 15 км он проезжает за 5 минут, любую из дуг BC длиной 25 км — за 13 минут, а любую из дуг AC — за 19 минут. Выехав из точки A, автомобиль через 1 час 35 минут оказался в ней же. Сколько километров проехал автомобиль?

Ответ: 220

В-3

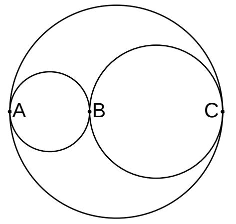
Автодром состоит из трех попарно касающихся кольцевых трасс (см. рисунок). Автомобиль в любой точке касания может продолжать движение по любой из двух возможных трасс, но нигде не может разворачиваться на 180^o. По каждой из трех трасс автомобиль едет со своей скоростью, так что любую из дуг AB длиной 13 км он проезжает за 7 минут, любую из дуг BC длиной 21 км — за 11 минут, а любую из дуг AC — за 17 минут. Выехав из точки A, автомобиль через 1 час 25 минут оказался в ней же. Сколько километров проехал автомобиль?



Ответ: 162

В-4

Автодром состоит из трех попарно касающихся кольцевых трасс (см. рисунок). Автомобиль в любой точке касания может продолжать движение по любой из двух возможных трасс, но нигде не может разворачиваться на 180^o. По каждой из трех трасс автомобиль едет со своей скоростью, так что любую из дуг AB длиной 13 км он проезжает за 5 минут, любую из дуг BC длиной 27 км — за 13 минут, а любую из дуг AC — за 19 минут. Выехав из точки A, автомобиль через 1 час 35 минут оказался в ней же. Сколько километров проехал автомобиль?



Ответ: 212

Задача 5

В-1 Функция $y = f(x)$ такова, что $f\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) = \dfrac{1}{x-1}$. Найдите тангенс угла наклона касательной к графику функции

$$g(x) = \underbrace{f(f(\dots f(x)))}_{10}$$

в точке $x = 0$.

Ответ: $\dfrac{1}{1024}$

Решение. Сделаем замену переменных $t = \dfrac{x+1}{x-1}$. Тогда $x = \dfrac{t+1}{t-1} \Rightarrow x-1 = \dfrac{2}{t-1} \Rightarrow f(t) = \dfrac{t-1}{2}$

То есть, нам дана функция $f(x) = \dfrac{x-1}{2}$. Тогда будем иметь

$$f(f(x)) = \frac{\frac{x-1}{2} - 1}{2} = \frac{x-3}{4}.$$

Далее, получим

$$f(f(f(x))) = \frac{\frac{x-3}{4} - 1}{2} = \frac{x-7}{8}.$$

И так далее

$$f(f(f(f(x)))) = \frac{\frac{x-7}{8} - 1}{2} = \frac{x-15}{16};$$

$$\underbrace{f(f(\dots f(x)))}_{n} = \frac{x - 2^n + 1}{2^n}.$$

Точное обоснование легко получить методом математической индукции

$$\underbrace{f(f(\dots f(x)))}_{k+1} = \frac{\frac{x-2^k+1}{2} - 2^{k-1}}{2^k} = \frac{x - 2^{k+1} + 1}{2^{k+1}}.$$

угловой коэффициент наклона прямой равен $\dfrac{1}{2^n}$, значит при $n = 10$ будем иметь $\dfrac{1}{1024}$

В-2 Функция $y = f(x)$ такова, что $f\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right) = -\dfrac{2}{x+2}$. Найдите тангенс угла наклона касательной к графику функции

$$g(x) = \underbrace{f(f(\dots f(x)))}_{11}$$

в точке $x = 0$.

Ответ: $\dfrac{1}{2048}$

В-3 Функция $y = f(x)$ такова, что $f\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) = -\dfrac{1}{x+1}$. Найдите тангенс угла наклона касательной к графику функции

$$g(x) = \underbrace{f(f(\dots f(x)))}_{9}$$

в точке $x = 0$.

Ответ: $\frac{1}{512}$

В-4 Функция $y = f(x)$ такова, что $f\left(\frac{x+2}{x-2}\right) = \frac{2}{x-2}$. Найдите тангенс угла наклона касательной к графику функции

$$g(x) = \underbrace{f(f(\ldots f(x)))}_{12}$$

в точке $x = 0$.

Ответ: $\frac{1}{4096}$

Задача 6

B-1 Старинный подземный ход имеет свод параболической формы (то есть в поперечном сечении туннель ограничен полом — осью Ox и графиком некоторой параболы $y = a - bx^2$). Ширина туннеля (измеряется по полу) равна 24, высота туннеля равна 18. Ход укрепили распорками — на параболе отметили точки A, B, C, D и соединили их между собой балками. Балки AB и CD параллельны полу, AD пересекается с BC, и при этом $\angle ACB = \angle ADB = 90°$ Найдите расстояние между балками AB и CD.

Ответ: 8

Решение. Допустим, ширина тоннеля равна $2l$, а высота равна h. Из этих параметров однозначно выводятся параметры параболы: x принадлежит отрезку $[-l, l]$, а $y(l) = y(-l) = 0$, так что

$$y(x) = h - \frac{hx^2}{l^2}.$$

Теперь зададим координаты точек так:

$$A = \left(x_1, h\left(1 - \frac{x_1^2}{l^2}\right)\right), B = \left(-x_1; h\left(1 - \frac{x_1^2}{l^2}\right)\right), C = \left(x_2; h\left(1 - \frac{x_2^2}{l^2}\right)\right), D = \left(-x_2; h\left(1 - \frac{x_2^2}{l^2}\right)\right)$$

Так как AB и CD параллельны полу, понятно, что ординаты A и B одинаковы, значит, абсциссы отличаются только знаком. Аналогично для C и D.

Тогда перпендикулярность AC и CB, AD и DB можно выразить, например, через равенство нулю скалярных произведений. Достаточно рассмотреть одну пару, так как рисунок симметричен.

$$AC = \left(x_2 - x_1; \frac{h}{l^2}\left(x_1^2 - x_2^2\right)\right), \quad CB = \left(-x_1 - x_2; \frac{h}{l^2}\left(x_2^2 - x_1^2\right)\right)$$

$$AC \cdot CB = -(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) - \frac{h^2}{l^4}(x_2^2 - x_1^2)^2 = -(x_2^2 - x_1^2) - \frac{h^2}{l^4}(x_2^2 - x_1^2)^2 = 0$$

Выносим множитель:

$$-\left(x_2^2 - x_1^2\right)\left(\frac{h^2}{l^4}(x_2^2 - x_1^2) + 1\right) = 0$$

То есть либо $(x_2^2 - x_1^2) = 0$ (но балки не совпадают, поэтому такой вариант не пойдёт), либо

$$(x_2^2 - x_1^2) = -\frac{l^4}{h^2}.$$

А расстояние между балками — это

$$\left|\frac{h}{l^2}\left(x_2^2 - x_1^2\right)\right|,$$

или, после подстановки,

$$\frac{l^2}{h}.$$

B-2 Старинный подземный ход имеет свод параболической формы (то есть в поперечном сечении туннель ограничен полом — осью Ox и графиком некоторой параболы $y = a - bx^2$). Ширина туннеля (измеряется по полу) равна 16, высота туннеля равна 8. Ход укрепили распорками — на параболе отметили точки A, B, C, D и соединили их между собой балками. Балки

AB и CD параллельны полу, AD пересекается с BC, и при этом $\angle ACB = \angle ADB = 90°$ Найдите расстояние между балками AB и CD.

Ответ: 8

B-3 Старинный подземный ход имеет свод параболической формы (то есть в поперечном сечении туннель ограничен полом — осью Ox и графиком некоторой параболы $y = a - bx^2$). Ширина туннеля (измеряется по полу) равна 20, высота туннеля равна 10. Ход укрепили распорками — на параболе отметили точки A, B, C, D и соединили их между собой балками. Балки AB и CD параллельны полу, AD пересекается с BC, и при этом $\angle ACB = \angle ADB = 90°$ Найдите расстояние между балками AB и CD.

Ответ: 10

B-4 Старинный подземный ход имеет свод параболической формы (то есть в поперечном сечении туннель ограничен полом — осью Ox и графиком некоторой параболы $y = a - bx^2$). Ширина туннеля (измеряется по полу) равна 18, высота туннеля равна 9. Ход укрепили распорками — на параболе отметили точки A, B, C, D и соединили их между собой балками. Балки AB и CD параллельны полу, AD пересекается с BC, и при этом $\angle ACB = \angle ADB = 90°$ Найдите расстояние между балками AB и CD.

Ответ: 9

Задача 7

В-1 Пусть $S(n)$ означает сумму цифр натурального числа n. Найти наибольшее 100-значное натуральное число n, удовлетворяющее условию: для всех натуральных m $(1 \leqslant m \leqslant n)$ справедливы равенства $S(mn) = S(n)$.

Ответ: $n = 10^{100} - 1$.

Решение. Найдем все натуральные числа n с таким свойством. Среди однозначных чисел таким свойством, очевидно, обладает $n = 1$, и несложно проверить, что $n = 9$ также обладает таким свойством.

Пусть n — k-разрядное число $(k \geqslant 2)$. Тогда $10^{k-1} \leqslant n < 10^k - 1$. Очевидно, что число вида 10^{k-1} не обладает этим свойством. Рассмотрим $n \geqslant 10^{k-1} + 1$. Тогда для $m = 10^{k-1} + 1 \leqslant n$ должно выполняться равенство

$$S(mn) = S((10^{k-1} + 1)n) = S(n).$$

Пусть a — старшая цифра числа n $\left(a = \left[\frac{n}{10^{k-1}}\right]\right)$. Тогда

$$S((10^{k-1} + 1)n) = S(n + a) + S(n) - a$$

и равенство $S((10^{k-1}+1)n) = S(n)$ возможно только если $S(n+a) = a$. Так как у n цифра a уже стоит в старшем разряде, это возможно только если число $n+a$ переходит в следующий разряд, т.е. имеет вид $10^k - b$ $(1 \leqslant b \leqslant 9)$. Так как $S(2n) = S(n)$, то $S(2n)$ и $S(n)$ имеют одинаковый остаток при делении на 9, а значит n делится на 9.

Несложно проверить, что для $n = 10^k - 1$ выполнено $S(mn) = S(n) = 9k$.

В-2 Пусть $S(n)$ означает сумму цифр натурального числа n. Найти наибольшее 75-значное натуральное число n, удовлетворяющее условию: для всех натуральных m $(1 \leqslant m \leqslant n)$ справедливы равенства $S(mn) = S(n)$.

Ответ: $n = 10^{75} - 1$.

В-3 Пусть $S(n)$ означает сумму цифр натурального числа n. Найти наибольшее 85-значное натуральное число n, удовлетворяющее условию: для всех натуральных m $(1 \leqslant m \leqslant n)$ справедливы равенства $S(mn) = S(n)$.

Ответ: $n = 10^{85} - 1$.

В-4 Пусть $S(n)$ означает сумму цифр натурального числа n. Найти наибольшее 90-значное натуральное число n, удовлетворяющее условию: для всех натуральных m $(1 \leqslant m \leqslant n)$ справедливы равенства $S(mn) = S(n)$.

Ответ: $n = 10^{90} - 1$.

Задача 8

В-1 Сколько точек пространства с целочисленными координатами принадлежат треугольнику с вершинами $(3,4,5), (11,10,6), (5,8,9)$? Точки на вершинах и сторонах тоже считаются.

Ответ: 8

Решение. Перенесём треугольник одной вершиной в начало координат. Тогда его можно представлять как точку $(0,0,0)$, из которой выходят вектора $u=(8,6,1)$ и $v=(2,4,4)$ (аналогичные вектора во всех вариантах, отличаются перестановкой координат).

Тогда внутренность треугольника можно представить как $\lambda u+\mu v$, где λ, μ — действительные числа, $\lambda, \mu > 0$, и $\lambda+\mu < 1$. Вопрос о целых точках на треугольнике, получается, стоит так: при каких целых n, m, k система

$$\begin{cases} 8\lambda+2\mu=n, \\ 6\lambda+4\mu=m, \\ \lambda+4\mu=k. \end{cases}$$

имеет решения λ, μ, укладывающиеся в требования выше.

Мы выделили внутренность, потому что стороны легче рассмотреть отдельно. Три целочисленные вершины лежат в треугольнике по определению. На сторонах точки подсчитать тоже просто — стороны это вектора $u=(8,6,1)$, $v=(2,4,4)$, и третья сторона $(6,2,-3)$. Получить целочисленную точку можно только на середине вектора v, а у остальных сторон нет общих делителей координат, и через целые точки они не проходят. Значит, на периметре лежат $3+1 = 4$ точки.

Переходим к внутренней части треугольника. Вообще, конечно, нет гарантий, что там будет хотя бы одна целочисленная точка — но если такая есть, то её проекции на координатные плоскости тоже будут целочисленные. Поэтому давайте рассмотрим проекцию треугольника на плоскость Oxy, и отберём на ней потенциально подходящие пары (n,m), а после выкинем лишние.

Вообще проецировать треугольник можно на разные плоскости, и наш выбор определяется тем, на какой из них точек будет меньше.

Проецируем треугольник на Oxy — получается треугольник на плоскости с вершинами (0,0), (8,6), (2,4). Внутрь него точки попадут такие: (1,1), (2,2), (2,3), (3,3), (3,4), (4,4), (5,4), (6,5).

Решаем систему, состоящую из двух первых уравнений:

$$\begin{cases} 8\lambda+2\mu=n, \\ 6\lambda+4\mu=m. \end{cases}$$

Ответ будет такой:

$$\lambda=\frac{2n-m}{10}, \quad \mu=\frac{-3n+4m}{10}.$$

Полученные значения λ, μ подставляются в третье уравнение $\lambda+4\mu=k$, и если k оказывается целым — точка найдена. После подстановки получается выражение

$$-n+\frac{3}{2}m=k,$$

то есть m должна быть чётной. Из 8 кандидатов подойдут только 4:

$(2,2) \Rightarrow k=1$,

$(3,4) \Rightarrow k=3$,

$(4,4) \Rightarrow k=2$,

$(5,4) \Rightarrow k=1$.

Плюс 4 точки, и всего точек на треугольнике $4+4=8$.

B-2 Сколько точек пространства с целочисленными координатами принадлежат треугольнику с вершинами $(-7, 4, 3), (1, 5, 9), (-5, 8, 7)$? Точки на вершинах и сторонах тоже считаются.

Ответ: 8

B-3 Сколько точек пространства с целочисленными координатами принадлежат треугольнику с вершинами $(-5, -5, -5), (1, 3, -4), (-1, -3, -1)$? Точки на вершинах и сторонах тоже считаются.

Ответ: 8

B-4 Сколько точек пространства с целочисленными координатами принадлежат треугольнику с вершинами $(1, 1, 3), (7, 2, 11), (5, 5, 5)$? Точки на вершинах и сторонах тоже считаются.

Ответ: 8