Задача 1

В-1 На 5 квадратных дощечках написано по одной букве, из которых составлено слово «АКУЛА». Сколько можно составить из этих дощечек различных 4-буквенных слов (возможно, бессмысленных или непроизносимых)?

Ответ: 60

Решение. Давайте посмотрим, сколькими способами можно расставить эти дощечки в пятибуквенное слово.

На первом месте может быть одна из 5 дощечек, на втором — одна из оставшихся четырёх, на третьем — одна из трёх, на четвёртом — одна из двух, и на пятое место остаётся только одна. Всего $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ вариантов.

Так как после четырёх дощечек пятую выбирать уже не из чего, и ставится она однозначно — можно считать, что число четырёхбуквенных слов равно числу пятибуквенных.

Только мы насчитали больше слов, чем надо, потому что дощечки с буквами А считались разными, но буквы на них одинаковые. Если поменять местами дощечки с буквами А, слово не изменится — но изменится расстановка досок. Получается, что одно и то же слово описывается двумя разными расстановками дощечек. Значит, мы насчитали вдвое больше слов, чем надо, и ответ равен $60 = \frac{120}{2}$.

Задача 2

В-1 Бросается стандартная игральная кость (кубик, от 1 до 6 очков на грани, сумма очков на противоположных гранях равна семи). После броска записываем результат, перекатываем кубик случайным образом на одну из соседних граней, записываем новый результат, потом снова случайно перекатываем кубик на одну из соседних граней, и записываем третий результат.

Сколько разных возрастающих последовательностей очков мы можем получить?

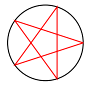
Ответ: 14

Решение. Мы получаем последовательность цифр $x - y - z$ с цифрами от 1 до 6. Возможна не каждая последовательность — числа с каждым ходом меняются, при этом невозможны соседства 1 и 6, 2 и 5, 3 и 4, так как они располагаются на противоположных гранях, и одним перекатом между ними не перейти. Выпишем и подсчитаем все возрастающие последовательности чисел, подходящие под такие условия.

4-5-6
3-5-6
2-3-5
2-3-6
2-4-5
2-4-6
1-2-3
1-2-4
1-2-6
1-3-5
1-3-6
1-4-5
1-4-6
1-5-6
Всего их 14.

Задача 3

В-1

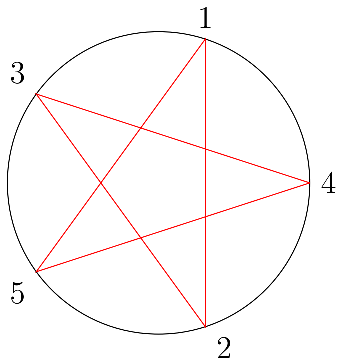


Пять светлячков с лазерными указками ползают по окружности, каждый — с постоянной скоростью. Первый за пять минут успевает проползти три круга, второй движется вдвое быстрее первого, третий — втрое быстрее первого, и так далее. Каждый светлячок не сводит луча своей лазерной указки со следующего по номеру жука, а пятый светлячок светит на первого. Все они начали ползти из одной точки в одну сторону. Через какое время лучи лазерных указок в первый раз изобразят правильную «звезду» (неважно как повёрнутую, но с вершинами на одинаковом расстоянии)?

Ответ: 40 секунд.

Решение. Скорость v первого жука равна трём пятым окружности в минуту. Так как поворот звёздочки нам не важен, можно считать, что первый жук стоит на месте, а у остальных скорости на v меньше: $0, v, 2v, 3v, 4v$.

Для того, чтобы получилась звёздочка, нужно, чтобы второй жук обгонял первого на целое число оборотов n_1 плюс две пятых оборота, чтобы третий обгонял первого на целое число оборотов n_2 плюс четыре пятых, четвёртый обгонял первого на целое число оборотов n_3 плюс одна пятая, а пятый обгонял первого на целое число оборотов n_4 плюс три пятых. Также годится зеркальный аналог этой расстановки.



Иными словами, в момент времени t выполнено

$$\begin{cases} vt = n_1 + 2/5 \\ 2vt = n_2 + 4/5 \\ 3vt = n_3 + 1/5 \\ 4vt = n_4 + 3/5. \end{cases}$$

Подставим v, равную $3/5$ оборота в минуту, и домножим каждое уравнение на 5.

$$\begin{cases} 3t = 5n_1 + 2 \\ 2 \cdot 3t = 5n_2 + 4 \\ 3 \cdot 3t = 5n_3 + 1 \\ 4 \cdot 3t = 5n_4 + 3. \end{cases}$$

По первому уравнению видно, что $3t$ — целое число. Попробуем его подобрать. $3t = 0, 1$ не подходят, а вот $3t = 2$ годится: $2 = 5 \cdot 0 + 2, 2 \cdot 2 = 5 \cdot 0 + 4, 3 \cdot 2 = 5 + 1, 4 \cdot 2 = 5 + 3$. Если рассмотреть зеркальную расстановку, получится $3t = 3$, но $3 > 2$, оставляем 2. Значит, время $t = \frac{2}{3}$ минуты, то есть 40 секунд.

Задача 4

В-1 Попугай решил измерить Удава. Если Попугай идет клювом вперед, то длина его шага равна $X = 9$ см, а если спиной вперед — то в $Y = 3$ раз меньше. Чтобы измерить Удава, Попугай прошагал вдоль него в направлении от хвоста до головы, идя то клювом вперед, то спиной. При этом Попугай насчитал $Z = 38$ шагов. Затем он прошел обратно, от головы до хвоста, и насчитал то ли $T = 40$, то ли $T+1 = 41$ шагов. Однако наблюдавшая за ним Мартышка сказала, что всего шагов, которые Попугай прошел клювом вперед, было $R = 59$. Какова длина Удава?

Ответ: 294 см.

Решение. Пусть Попугай прошел m_1 шагов клювом вперед, а n_1 шагов – спиной вперёд, когда шел от хвоста до головы. И пусть, соответственно, m_2 шагов клювом вперед, а n_2 шагов – спиной вперёд, когда шел обратно. Из условия имеем равенства $9m_1+3n_1 = 9m_2+3n_2$, $m_1+n_1 = 38$, $m_1 + m_2 = 59$, $m_2 + n_2 = 40$ или 41. Если во второй раз Попугай прошел 41 шаг, то при решении системы уравнений сверху получаются нецелые значения для m_1, n_1, m_2, n_2, чего не может быть. Значит, во второй раз он прошел 40 шагов. Решая указанную систему, получаем $m_1 = 30, n_1 = 8, m_2 = 29, n_2 = 11$. Откуда длина Удава равна $9 \cdot 30 + 3 \cdot 8 = 294$ см.

Систему можно решить, например, так. Пусть $m_2 + n_2 = x$. Выразим m_1 из равенства $m_1 + m_2 = 59$ и подставим найденное значение в остальные уравнения. Получим:

$$3(59 - m_2) + n_1 = 3m_2 + n_2,\ 59 - m_2 + n_1 = 38,\ m_2 + n_2 = x.$$

Далее, выразим m_2 из равенства $59 - m_2 + n_1 = 38$ и подставим найденное значение в остальные уравнения. Получим:

$$3(59 - (21 + n_1)) + n_1 = 3(21 + n_1) + n_2,\ 21 + n_1 + n_2 = x.$$

Из первого равенства находим $n_2 = 51 - 5n_1$. Подставляя данное значение в оставшееся уравнения, получаем $21 + n_1 + 51 - 5n_1 = x$, откуда $n_1 = \frac{72-x}{4}$. Значение $x = 41$ не подходит, поскольку число $\frac{31}{4}$ нецелое. Значит, $x = 40$, откуда $n_1 = 8$, $n_2 = 51-5n_1 = 11$, $m_2 = 21+n_1 = 29$, $m_1 = 59 - m_2 = 30$.

Задача 5

В-1

На бумаге закрашена фигура указанной формы. Бумагу складывают пополам, потом сложенную бумагу разрезают по прямой. Затем все куски разворачиваются. Где провести сгиб и как сделать разрез, чтобы у получившихся кусков фигуры было как можно больше углов? В ответе приведите чертёж, а также укажите это максимальное число углов.

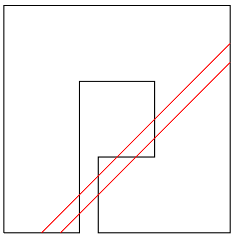
Пропорции рисунка: квадрат имеет размеры 3 на 3, квадратный вырез размеров 1 на 1, расположен ровно посередине, к нему ведёт прорезь шириной 0.25.

Ответ: 34

Решение. Мы получаем новые углы, когда разрез проходит через отрезки, так что самый выгодный разрез проходит через наибольшее число отрезков. Сгиб и разрезание на самом деле аналогичны разрезанию по двум параллельным прямым (сгиб расположен параллельно разрезам посередине между ними), или разрезанию по двум лучам, выходящим из одной точки (сгиб — это биссектриса такого угла). Сам «угол» из двух лучей тоже может добавить углов на нарезанных фигурках, но здесь нам будет выгоднее провести две параллельные.

Вот пример разрезания, на котором каждый разрез проходит через 6 отрезков.

Рисунок не единственный, а в ответе не обязательно должны быть параллельные разрезы — но нужно, чтобы разрез и его «отражение» проходили через 6 отрезков каждый.



С такими разрезами мы насчитаем $3 + 4 + 3 + 4 + 4 + 9 + 7 = 34$ угла.

Задача 6

В-1 В кино пришли 5 девочек, 3 мальчика и учительница. Все они расселись в первом ряду, в котором места пронумерованы от 1 до 10. По пути в кинотеатр 5 девочек начали активно общаться, и учительница решила, что сажать их рядом небезопасно. Между любыми двумя девочками должно быть минимум одно место: или незанятое, или занятое мальчиком или учительницей. Сколько различных способов рассадки имеется? (Два способа отличаются, если хотя бы один из участников группы сидит на местах с разными номерами.)

Ответ: 86400

Решение. Обозначим девочек буквой Д (таких букв 5). Между буквами Д должен быть какой-то из «разделителей» (или больше одного разделителя): или мальчик, или учительница, или свободное место. Обозначим разделитель буквой Р – таких букв $3 + 1 + 1 = 5$. Расположим девочек слева направо и расположим между ними по одному разделителю: Д – Р – Д – Р – Д – Р – Д – Р – Д. В результате останется вставить еще одну букву Р. Это можно сделать 6 способами (получаются варианты типа Р – Д – Р – Д – Р – Д – Р – Д – Р – Д, Д – Р – Д – Р – Д – Р – Р – Д – Р – Д и т. п.). В каждом из указанных вариантов так как все девочки – разные, и все «разделители» разные, есть $5! \cdot 5!$ способов переставить их местами, оставаясь в рамках данного варианта. Таким образом, количество способов рассадки равно: $6 \cdot 5! \cdot 5! = 6 \cdot 120^2 = 86400$.

Задача 7

В-1 Расположите числа по возрастанию:

$$A = \frac{\overbrace{1111\ldots1110}^{2024}}{\underbrace{1111\ldots1111}_{2024}}, \qquad B = \frac{\overbrace{2222\ldots2221}^{2024}}{\underbrace{2222\ldots2223}_{2024}}, \quad C = \frac{\overbrace{3333\ldots3331}^{2024}}{\underbrace{3333\ldots3334}_{2024}}$$

Ответ: $A < C < B$

Решение.

$$A = \frac{\overbrace{1111\ldots1110}^{2024}}{\underbrace{1111\ldots1111}_{2024}} = \frac{\overbrace{1111\ldots1111}^{2024}-1}{\underbrace{1111\ldots1111}_{2024}} = 1 - \frac{1}{\underbrace{1111\ldots1111}_{2024}}$$

$$B = \frac{\overbrace{2222\ldots2221}^{2024}}{\underbrace{2222\ldots2223}_{2024}} = \frac{\overbrace{2222\ldots2223}^{2024}-2}{\underbrace{2222\ldots2223}_{2024}} = 1-\frac{2}{\underbrace{2222\ldots2223}_{2024}} = 1-\frac{2}{\underbrace{2222\ldots2222}_{2024}+1} = 1-\frac{1}{\underbrace{1111\ldots1111}_{2024}+\frac{1}{2}}$$

$$C = \frac{\overbrace{3333\ldots3331}^{2024}}{\underbrace{3333\ldots3334}_{2024}} = \frac{\overbrace{3333\ldots3334}^{2024}-3}{\underbrace{3333\ldots3334}_{2024}} = 1-\frac{3}{\underbrace{3333\ldots3334}_{2024}} = 1-\frac{3}{\underbrace{3333\ldots3333}_{2024}+1} = 1-\frac{1}{\underbrace{1111\ldots1111}_{2024}+\frac{1}{3}}$$

Отсюда понятен ответ : $A < C < B$.