

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Заключительный этап 2023/24 учебного года для 10 класса

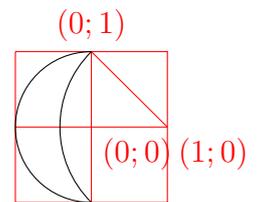
Задача 1

В-1 Болельщики должны выбрать 6 лучших хоккеистов чемпионата: одного вратаря, двух защитников и трех нападающих. Среди претендентов: 3 вратаря, 5 защитников, 6 нападающих и 3 «универсала». «Универсал» — игрок, хороший в разных ролях, который поэтому может быть выбран как в качестве защитника, так в качестве нападающего (но не вратаря). Сколько существует способов выбрать эту шестерку? Требуется получить числовое значение.

Задача 2

В-1

Живописец закрасил акварелью полумесяц на клетчатой бумаге. Контур полумесяца состоит из двух дуг — одна от окружности с центром в $(0; 0)$, проходящей через $(0; 1)$, другая — от окружности с центром в $(1; 0)$, проходящей через $(0; 1)$.



К утру краска расплылась так, что каждая точка полумесяца превратилась в круг радиуса 0.5. Найдите площадь получившейся фигуры.

Задача 3

В-1 Решите уравнение: $|x^3 + y^3 - 19| + |x^2y + xy^2 + 6| + \frac{|x|y| - y|x| + 2xy}{xy} = 0$.

Задача 4

В-1 На стороне AC треугольника ABC отмечены такие точки M и N , что $\angle ABM = 15^\circ$, $\angle MBN = 45^\circ$ и $\angle NBC = 75^\circ$, а сумма и произведение площадей треугольников ABM и NBC равны 5 и 3 соответственно. Найдите площадь треугольника ABC .

Задача 5

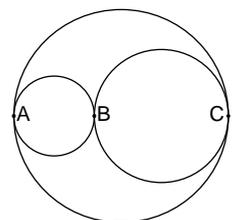
В-1 Найдите минимальное значение выражения

$$\frac{2bc - 2a^2 + 2a}{2a} + \frac{2ca - 2b^2 + 2b}{2b} + \frac{2ab - 2c^2 + 2c}{2c}, \quad a, b, c > 0.$$

Задача 6

В-1

Автодром состоит из трех попарно касающихся кольцевых трасс (см. рисунок). Автомобиль в любой точке касания может продолжать движение по любой из двух возможных трасс, но нигде не может разворачиваться на 180° . По каждой из трех трасс автомобиль едет со своей скоростью, так что любую из дуг AB длиной 15 км он проезжает за 7 минут, любую из дуг BC длиной 25 км — за 11 минут, а любую из дуг AC — за 17 минут. Выехав из точки A , автомобиль через 1 час 25 минут оказался в ней же. Сколько километров проехал автомобиль?



Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Заключительный этап 2023/24 учебного года для 10 класса

Задача 7

В-1 Старинный подземный ход имеет свод параболической формы (то есть в поперечном сечении туннель ограничен полом — осью Ox и графиком некоторой параболы $y = a - bx^2$). Ширина туннеля (измеряется по полу) равна 24, высота туннеля равна 18. Ход укрепили распорками — на параболе отметили точки A, B, C, D и соединили их между собой балками. Балки AB и CD параллельны полу, AD пересекается с BC , и при этом $\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$. Найдите расстояние между балками AB и CD .

Задача 8

В-1 Пусть $S(n)$ означает сумму цифр натурального числа n . Найти наибольшее 100-значное натуральное число n , удовлетворяющее условию: для всех натуральных m ($1 \leq m \leq n$) справедливы равенства $S(mn) = S(n)$.