

### Задача 1

**В-1** Болельщики должны выбрать 6 лучших хоккеистов чемпионата: одного вратаря, двух защитников и трех нападающих. Среди претендентов: 3 вратаря, 5 защитников, 6 нападающих и 3 «универсала». «Универсал» — игрок, хороший в разных ролях, который поэтому может быть выбран как в качестве защитника, так в качестве нападающего (но не вратаря). Сколько существует способов выбрать эту шестерку? Требуется получить числовое значение.

**В-2** Болельщики должны выбрать 6 лучших хоккеистов чемпионата: одного вратаря, двух защитников и трех нападающих. Среди претендентов: 3 вратаря, 4 защитника, 7 нападающих и 3 «универсала». «Универсал» — игрок, хороший в разных ролях, который поэтому может быть выбран как в качестве защитника, так в качестве нападающего (но не вратаря). Сколько существует способов выбрать эту шестерку? Требуется получить числовое значение.

**В-3** Болельщики должны выбрать 6 лучших хоккеистов чемпионата: одного вратаря, двух защитников и трех нападающих. Среди претендентов: 2 вратаря, 5 защитников, 6 нападающих и 3 «универсала». «Универсал» — игрок, хороший в разных ролях, который поэтому может быть выбран как в качестве защитника, так в качестве нападающего (но не вратаря). Сколько существует способов выбрать эту шестерку? Требуется получить числовое значение.

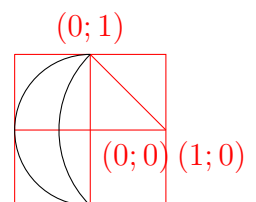
**В-4** Болельщики должны выбрать 6 лучших хоккеистов чемпионата: одного вратаря, двух защитников и трех нападающих. Среди претендентов: 2 вратаря, 4 защитника, 7 нападающих и 3 «универсала». «Универсал» — игрок, хороший в разных ролях, который поэтому может быть выбран как в качестве защитника, так в качестве нападающего (но не вратаря). Сколько существует способов выбрать эту шестерку? Требуется получить числовое значение.

### Задача 2

#### В-1

Живописец закрасил акварелью полумесяц на клетчатой бумаге. Контур полумесяца состоит из двух дуг — одна от окружности с центром в  $(0; 0)$ , проходящей через  $(0; 1)$ , другая — от окружности с центром в  $(1; 0)$ , проходящей через  $(0; 1)$ .

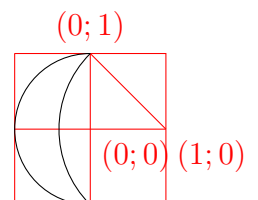
К утру краска расплылась так, что каждая точка полумесяца превратилась в круг радиуса  $0.5$ . Найдите площадь получившейся фигуры.



#### В-2

Живописец закрасил акварелью полумесяц на клетчатой бумаге. Контур полумесяца состоит из двух дуг — одна от окружности с центром в  $(0; 0)$ , проходящей через  $(0; 1)$ , другая — от окружности с центром в  $(1; 0)$ , проходящей через  $(0; 1)$ .

К утру краска расплылась так, что каждая точка полумесяца превратилась в круг радиуса  $0.25$ . Найдите площадь получившейся фигуры.

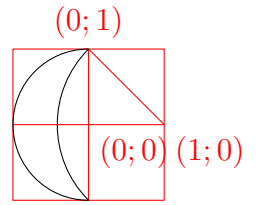


---

**В-3**

Живописец закрасил акварелью полумесяц на клетчатой бумаге. Контур полумесяца состоит из двух дуг — одна от окружности с центром в  $(0; 0)$ , проходящей через  $(0; 1)$ , другая — от окружности с центром в  $(1; 0)$ , проходящей через  $(0; 1)$ .

К утру краска расплылась так, что каждая точка полумесяца превратилась в круг радиуса  $1/3$ . Найдите площадь получившейся фигуры.

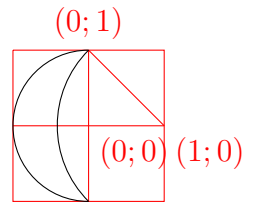


---

**В-4**

Живописец закрасил акварелью полумесяц на клетчатой бумаге. Контур полумесяца состоит из двух дуг — одна от окружности с центром в  $(0; 0)$ , проходящей через  $(0; 1)$ , другая — от окружности с центром в  $(1; 0)$ , проходящей через  $(0; 1)$ .

К утру краска расплылась так, что каждая точка полумесяца превратилась в круг радиуса  $\sqrt{2}/2$ . Найдите площадь получившейся фигуры.



---

**Задача 3**

**В-1** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (xy - 3 + 3x - y)|y - x - 9| = (x - 4)|xy - 3 + 3x - y|, \\ \sqrt{y - x + 9} = y - 4. \end{cases}$$

---

**В-2** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (xy + 3x - 2y - 6)|y - x - 8| = (x - 5)|xy + 3x - 2y - 6|, \\ \sqrt{y - x + 10} = y - 4. \end{cases}$$

---

**В-3** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (xy + 4x - y - 4)|y - x - 8| = (x - 4)|xy + 4x - y - 4|, \\ \sqrt{y - x + 10} = y - 3. \end{cases}$$

---

**В-4** Решите систему уравнений

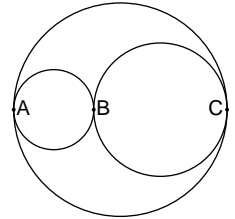
$$\begin{cases} (xy + 2x - y - 2)|y - x - 10| = (x - 4)|xy + 2x - y - 2|, \\ \sqrt{y - x + 8} = y - 5. \end{cases}$$

---

Задача 4

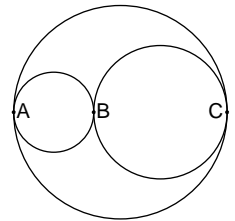
В-1

Автодром состоит из трех попарно касающихся кольцевых трасс (см. рисунок). Автомобиль в любой точке касания может продолжать движение по любой из двух возможных трасс, но нигде не может разворачиваться на  $180^\circ$ . По каждой из трех трасс автомобиль едет со своей скоростью, так что любую из дуг  $AB$  длиной 15 км он проезжает за 7 минут, любую из дуг  $BC$  длиной 25 км — за 11 минут, а любую из дуг  $AC$  — за 17 минут. Выехав из точки  $A$ , автомобиль через 1 час 25 минут оказался в ней же. Сколько километров проехал автомобиль?



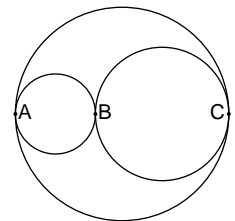
В-2

Автодром состоит из трех попарно касающихся кольцевых трасс (см. рисунок). Автомобиль в любой точке касания может продолжать движение по любой из двух возможных трасс, но нигде не может разворачиваться на  $180^\circ$ . По каждой из трех трасс автомобиль едет со своей скоростью, так что любую из дуг  $AB$  длиной 15 км он проезжает за 5 минут, любую из дуг  $BC$  длиной 25 км — за 13 минут, а любую из дуг  $AC$  — за 19 минут. Выехав из точки  $A$ , автомобиль через 1 час 35 минут оказался в ней же. Сколько километров проехал автомобиль?



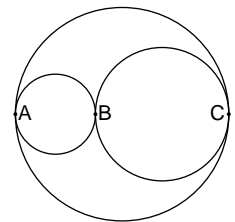
В-3

Автодром состоит из трех попарно касающихся кольцевых трасс (см. рисунок). Автомобиль в любой точке касания может продолжать движение по любой из двух возможных трасс, но нигде не может разворачиваться на  $180^\circ$ . По каждой из трех трасс автомобиль едет со своей скоростью, так что любую из дуг  $AB$  длиной 13 км он проезжает за 7 минут, любую из дуг  $BC$  длиной 21 км — за 11 минут, а любую из дуг  $AC$  — за 17 минут. Выехав из точки  $A$ , автомобиль через 1 час 25 минут оказался в ней же. Сколько километров проехал автомобиль?



В-4

Автодром состоит из трех попарно касающихся кольцевых трасс (см. рисунок). Автомобиль в любой точке касания может продолжать движение по любой из двух возможных трасс, но нигде не может разворачиваться на  $180^\circ$ . По каждой из трех трасс автомобиль едет со своей скоростью, так что любую из дуг  $AB$  длиной 13 км он проезжает за 5 минут, любую из дуг  $BC$  длиной 27 км — за 13 минут, а любую из дуг  $AC$  — за 19 минут. Выехав из точки  $A$ , автомобиль через 1 час 35 минут оказался в ней же. Сколько километров проехал автомобиль?



Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Заключительный этап 2023/24 учебного года для 11 класса

**Задача 5**

**В-1** Функция  $y = f(x)$  такова, что  $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{1}{x-1}$ . Найдите тангенс угла наклона касательной к графику функции

$$g(x) = \underbrace{f(f(\dots f(x)))}_{10}$$

в точке  $x = 0$ .

**В-2** Функция  $y = f(x)$  такова, что  $f\left(\frac{x-2}{x+2}\right) = -\frac{2}{x+2}$ . Найдите тангенс угла наклона касательной к графику функции

$$g(x) = \underbrace{f(f(\dots f(x)))}_{11}$$

в точке  $x = 0$ .

**В-3** Функция  $y = f(x)$  такова, что  $f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -\frac{1}{x+1}$ . Найдите тангенс угла наклона касательной к графику функции

$$g(x) = \underbrace{f(f(\dots f(x)))}_{9}$$

в точке  $x = 0$ .

**В-4** Функция  $y = f(x)$  такова, что  $f\left(\frac{x+2}{x-2}\right) = \frac{2}{x-2}$ . Найдите тангенс угла наклона касательной к графику функции

$$g(x) = \underbrace{f(f(\dots f(x)))}_{12}$$

в точке  $x = 0$ .

**Задача 6**

**В-1** Старинный подземный ход имеет свод параболической формы (то есть в поперечном сечении туннель ограничен полом — осью  $Ox$  и графиком некоторой параболы  $y = a - bx^2$ ). Ширина туннеля (измеряется по полу) равна 24, высота туннеля равна 18. Ход укрепили распорками — на параболе отметили точки  $A, B, C, D$  и соединили их между собой балками. Балки  $AB$  и  $CD$  параллельны полу,  $AD$  пересекается с  $BC$ , и при этом  $\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$ . Найдите расстояние между балками  $AB$  и  $CD$ .

**В-2** Старинный подземный ход имеет свод параболической формы (то есть в поперечном сечении туннель ограничен полом — осью  $Ox$  и графиком некоторой параболы  $y = a - bx^2$ ). Ширина туннеля (измеряется по полу) равна 16, высота туннеля равна 8. Ход укрепили распорками — на параболе отметили точки  $A, B, C, D$  и соединили их между собой балками. Балки

$AB$  и  $CD$  параллельны полу,  $AD$  пересекается с  $BC$ , и при этом  $\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$  Найдите расстояние между балками  $AB$  и  $CD$ .

---

**В-3** Старинный подземный ход имеет свод параболической формы (то есть в поперечном сечении туннель ограничен полом — осью  $Ox$  и графиком некоторой параболы  $y = a - bx^2$ ). Ширина туннеля (измеряется по полу) равна 20, высота туннеля равна 10. Ход укрепили распорками — на параболе отметили точки  $A, B, C, D$  и соединили их между собой балками. Балки  $AB$  и  $CD$  параллельны полу,  $AD$  пересекается с  $BC$ , и при этом  $\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$  Найдите расстояние между балками  $AB$  и  $CD$ .

---

**В-4** Старинный подземный ход имеет свод параболической формы (то есть в поперечном сечении туннель ограничен полом — осью  $Ox$  и графиком некоторой параболы  $y = a - bx^2$ ). Ширина туннеля (измеряется по полу) равна 18, высота туннеля равна 9. Ход укрепили распорками — на параболе отметили точки  $A, B, C, D$  и соединили их между собой балками. Балки  $AB$  и  $CD$  параллельны полу,  $AD$  пересекается с  $BC$ , и при этом  $\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$  Найдите расстояние между балками  $AB$  и  $CD$ .

---

### Задача 7

**В-1** Пусть  $S(n)$  означает сумму цифр натурального числа  $n$ . Найти наибольшее 100-значное натуральное число  $n$ , удовлетворяющее условию: для всех натуральных  $m$  ( $1 \leq m \leq n$ ) справедливы равенства  $S(mn) = S(n)$ .

---

**В-2** Пусть  $S(n)$  означает сумму цифр натурального числа  $n$ . Найти наибольшее 75-значное натуральное число  $n$ , удовлетворяющее условию: для всех натуральных  $m$  ( $1 \leq m \leq n$ ) справедливы равенства  $S(mn) = S(n)$ .

---

**В-3** Пусть  $S(n)$  означает сумму цифр натурального числа  $n$ . Найти наибольшее 85-значное натуральное число  $n$ , удовлетворяющее условию: для всех натуральных  $m$  ( $1 \leq m \leq n$ ) справедливы равенства  $S(mn) = S(n)$ .

---

**В-4** Пусть  $S(n)$  означает сумму цифр натурального числа  $n$ . Найти наибольшее 90-значное натуральное число  $n$ , удовлетворяющее условию: для всех натуральных  $m$  ( $1 \leq m \leq n$ ) справедливы равенства  $S(mn) = S(n)$ .

---

### Задача 8

**В-1** Сколько точек пространства с целочисленными координатами принадлежат треугольнику с вершинами  $(3, 4, 5)$ ,  $(11, 10, 6)$ ,  $(5, 8, 9)$ ? Точки на вершинах и сторонах тоже считаются.

---

**В-2** Сколько точек пространства с целочисленными координатами принадлежат треугольнику с вершинами  $(-7, 4, 3)$ ,  $(1, 5, 9)$ ,  $(-5, 8, 7)$ ? Точки на вершинах и сторонах тоже считаются.

---

**В-3** Сколько точек пространства с целочисленными координатами принадлежат треугольнику с вершинами  $(-5, -5, -5)$ ,  $(1, 3, -4)$ ,  $(-1, -3, -1)$ ? Точки на вершинах и сторонах тоже считаются.

---

**В-4** Сколько точек пространства с целочисленными координатами принадлежат треугольнику с вершинами  $(1, 1, 3)$ ,  $(7, 2, 11)$ ,  $(5, 5, 5)$ ? Точки на вершинах и сторонах тоже считаются.

---