

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Заключительный этап 2023/24 учебного года для 9 класса

Задача 1

В-1 Различные целые числа m и n таковы, что числа $\left(\frac{1}{m} - 2\right)$ и $\left(\frac{1}{n} - 2\right)$ являются корнями квадратного трехчлена $x^2 + ax + b$ с целыми коэффициентами. Найти все возможные значения выражения $a + b$.

Задача 2

В-1 Бросается стандартная игральная кость (кубик, от 1 до 6 очков на грани, сумма очков на противоположных гранях равна семи). После броска записываем результат, перекатываем кубик случайным образом на одну из соседних граней, записываем новый результат, потом снова случайно перекатываем кубик на одну из соседних граней, и записываем третий результат. Сколько разных возрастающих последовательностей очков мы можем получить?

Задача 3

В-1 Найдите минимальное значение выражения

$$\frac{2bc - 2a^2 + 2a}{2a} + \frac{2ca - 2b^2 + 2b}{2b} + \frac{2ab - 2c^2 + 2c}{2c}, \quad a, b, c > 0.$$

Задача 4

В-1 В кино пришли 5 девочек, 3 мальчика и учительница. Все они расселись в первом ряду, в котором места пронумерованы от 1 до 10. По пути в кинотеатр 5 девочек начали активно общаться, и учительница решила, что сажать их рядом небезопасно. Между любыми двумя девочками должно быть минимум одно место: или незанятое, или занятое мальчиком или учительницей. Сколько различных способов рассадки имеется? (Два способа отличаются, если хотя бы один из участников группы сидит на местах с разными номерами.)

Задача 5

В-1 На стороне AC треугольника ABC отмечены такие точки M и N , что $\angle ABM = 15^\circ$, $\angle MBN = 45^\circ$ и $\angle NBC = 75^\circ$, а сумма и произведение площадей треугольников ABM и NBC равны 5 и 3 соответственно. Найдите площадь треугольника ABC .

Задача 6

В-1 В кувшин залили 7 литров воды. Ровно через сутки в кувшин добавили 5 литров воды, и эту операцию повторяли каждые очередные сутки. В промежутках между доливаниями из кувшина успевали выпить ровно половину воды, имевшейся после предыдущей заливки.

а) Какого минимального объёма должен быть кувшин, чтобы он никогда не мог наполниться при данных условиях?

б) На какой день кувшин такого объёма впервые окажется наполнен не менее, чем на 99,9 процента?

Задача 7

В-1

Автодром состоит из трех попарно касающихся кольцевых трасс (см. рисунок). Автомобиль в любой точке касания может продолжать движение по любой из двух возможных трасс, но нигде не может разворачиваться на 180° . По каждой из трех трасс автомобиль едет со своей скоростью, так что любую из дуг AB длиной 15 км он проезжает за 7 минут, любую из дуг BC длиной 25 км — за 11 минут, а любую из дуг AC — за 17 минут. Выехав из точки A , автомобиль через 1 час 25 минут оказался в ней же. Сколько километров проехал автомобиль?

