

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Отборочный этап 2023/24 учебного года для 10 класса

**Задача 1**

**В-1** У Нади в аквариуме живут 5 рыбок. Каждый день в обед она насыпает им 30 граммов корма. Каждая рыбка съедает пропорциональное ее весу количество корма, причем к вечеру масса каждой рыбки увеличивается на 0.1% от съеденного. Сегодня утром массы рыбок в граммах были таковы: (1, 3, 4, 6, 14). Какова будет масса самой тяжелой рыбки через 60 дней вечером?

**Ответ:** 14.9

**Решение.** Можно считать, что есть всего две рыбки: самая тяжелая и сумма всех остальных. После этого ответ вычисляется просто:  $\frac{XKY}{2 \cdot 100} + M_N$ . (Где  $X$  — масса корма в день,  $K$  — число дней,  $Y$  — процент увеличения массы,  $M_N$  — масса самой тяжелой рыбки).

**В-2** У Нади в аквариуме живут 5 рыбок. Каждый день в обед она насыпает им 25 граммов корма. Каждая рыбка съедает пропорциональное ее весу количество корма, причем к вечеру масса каждой рыбки увеличивается на 0.2% от съеденного. Сегодня утром массы рыбок в граммах были таковы: (2, 3, 3, 7, 15). Какова будет масса самой тяжелой рыбки через 62 дней вечером?

**Ответ:** 16.55

**В-3** У Нади в аквариуме живут 6 рыбок. Каждый день в обед она насыпает им 30 граммов корма. Каждая рыбка съедает пропорциональное ее весу количество корма, причем к вечеру масса каждой рыбки увеличивается на 0.1% от съеденного. Сегодня утром массы рыбок в граммах были таковы: (1, 3, 4, 4, 9, 21). Какова будет масса самой тяжелой рыбки через 64 дней вечером?

**Ответ:** 21.96

**В-4** У Нади в аквариуме живут 6 рыбок. Каждый день в обед она насыпает им 25 граммов корма. Каждая рыбка съедает пропорциональное ее весу количество корма, причем к вечеру масса каждой рыбки увеличивается на 0.2% от съеденного. Сегодня утром массы рыбок в граммах были таковы: (2, 3, 6, 9, 9, 29). Какова будет масса самой тяжелой рыбки через 66 дней вечером?

**Ответ:** 30.65

**Задача 2**

**В-1** Числа  $x, y$  таковы, что  $\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = 5$ . Найдите  $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} + \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ .

**Ответ:** 2.9

**Решение.** По условию,  $\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{(x+y)^2 + (x-y)^2}{(x-y)(x+y)} = 2 \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} = 5$ , поэтому  $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} + \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{5}{2} + \frac{2}{5} = 2.9$ .

**В-2** Числа  $x, y$  таковы, что  $\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = 10$ . Найдите  $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} + \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ .

**Ответ:** 5.2

**В-3** Числа  $x, y$  таковы, что  $\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = 20$ . Найдите  $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} + \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ .

**Ответ:** 10.1

**В-4** Числа  $x, y$  таковы, что  $\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = 8$ . Найдите  $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} + \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ .

**Ответ:** 4.25

**Задача 3**

**В-1** Ровно в 8:00 от пристани  $A$  вниз по течению реки вышел катер и от пристани  $B$ , находящейся на расстоянии 72 км от  $A$ , навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Второй катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 11:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 3 км/ч?

**Ответ:** 24

**Решение.** Если рассмотреть движение относительно реки, то второй катер за время прошел с собственной скоростью путь от пункта  $B$  до середины  $C$  отрезка  $AB$  и обратно. Поэтому его скорость равна  $72/(11 - 8)$ , причём независимо от скорости течения реки. Например, в первом варианте ответ: 24.

---

**В-2** Ровно в 9:00 от пристани  $A$  вниз по течению реки вышел катер и от пристани  $B$ , находящейся на расстоянии 69 км от  $A$ , навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Второй катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 12:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 2 км/ч?

**Ответ:** 23

**В-3** Ровно в 7:00 от пристани  $A$  вниз по течению реки вышел катер и от пристани  $B$ , находящейся на расстоянии 70 км от  $A$ , навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Второй катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 12:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 4 км/ч?

**Ответ:** 14

**В-4** Ровно в 6:00 от пристани  $A$  вниз по течению реки вышел катер и от пристани  $B$ , находящейся на расстоянии 85 км от  $A$ , навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Второй катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 11:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 3 км/ч?

**Ответ:** 17

**В-5** Ровно в 8:00 от пристани  $A$  вниз по течению реки вышел катер и от пристани  $B$ , находящейся на расстоянии 52 км от  $A$ , навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Второй катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 10:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 2 км/ч?

**Ответ:** 26

**В-6** Ровно в 9:00 от пристани  $A$  вниз по течению реки вышел катер и от пристани  $B$ , находящейся на расстоянии 57 км от  $A$ , навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Второй катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 12:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 4 км/ч?

**Ответ:** 19

**В-7** Ровно в 7:00 от пристани  $A$  вниз по течению реки вышел катер и от пристани  $B$ , находящейся на расстоянии 72 км от  $A$ , навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Второй катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 11:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 3 км/ч?

**Ответ:** 18

---

**В-8** Ровно в 6:00 от пристани  $A$  вниз по течению реки вышел катер и от пристани  $B$ , находящейся на расстоянии 64 км от  $A$ , навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Вторым катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 10:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 2 км/ч?

**Ответ:** 16

---

#### Задача 4

**В-1** Найдите наименьшее значение выражения  $(a + 2)(b + 2)(c + 2)$ , если  $a, b, c$  — положительные числа, удовлетворяющие условию  $abc = 1$ .

**Ответ:** 27

**Решение.** (Для 1 варианта) По неравенству о средних имеем

$$(a + 2)(b + 2)(c + 2) = (a + 1 + 1)(b + 1 + 1)(c + 1 + 1) \geq 3a^{\frac{1}{3}}3b^{\frac{1}{3}}3c^{\frac{1}{3}} = 27(abc)^{\frac{1}{3}},$$

причём равенство достигается при  $a = b = c = 1$ .

---

**В-2** Найдите наименьшее значение выражения  $(a + 3)(b + 3)(c + 3)$ , если  $a, b, c$  — положительные числа, удовлетворяющие условию  $abc = 1$ .

**Ответ:** 64

---

**В-3** Найдите наименьшее значение выражения  $(a + 4)(b + 4)(c + 4)$ , если  $a, b, c$  — положительные числа, удовлетворяющие условию  $abc = 8$ .

**Ответ:** 216

---

**В-4** Найдите наименьшее значение выражения  $(a + 6)(b + 6)(c + 6)$ , если  $a, b, c$  — положительные числа, удовлетворяющие условию  $abc = 27$ .

**Ответ:** 729

---

### Задача 5

**В-1** В ресторане «Обломов» выпекают 3 вида пирожков: с мясом, с рыбой, с грибами. Повар обратил внимание, что 25 ноября среди тех, кто заказывал по 4 пирожка, не повторился ни один набор пирожков. Какое максимальное количество посетителей «Обломова» могли заказать в этот день по 4 пирожка?

**Ответ:** 15

**Решение.** Решение. Задача на число сочетаний с повторениями. Количество выбираемых элементов  $r = 4$ . Количество видов продукции  $n = 3$ . То есть, количество «перегородок»  $n - 1 = 2$ .

Воспользуемся формулой  $C_{r+n-1}^r = \frac{(r+n-1)!}{r! \cdot (n-1)!} = C_6^4 = 15$

---

**В-2** В ресторане «Обломов» выпекают 4 вида пирожков: с мясом, с рыбой, с грибами и с капустой. Повар обратил внимание, что 25 ноября среди тех, кто заказывал по 5 пирожков, не повторился ни один набор пирожков. Какое максимальное количество посетителей «Обломова» могли заказать в этот день по 5 пирожков?

**Ответ:** 56

---

**В-3** В ресторане «Обломов» выпекают 4 вида пирожков: с мясом, с рыбой, с грибами и с капустой. Повар обратил внимание, что 25 ноября среди тех, кто заказывал по 4 пирожка, не повторился ни один набор пирожков. Какое максимальное количество посетителей «Обломова» могли заказать в этот день по 4 пирожка?

**Ответ:** 35

---

**В-4** В ресторане «Обломов» выпекают 3 вида пирожков: с мясом, с рыбой, с грибами. Повар обратил внимание, что 25 ноября среди тех, кто заказывал по 5 пирожков, не повторился ни один набор пирожков. Какое максимальное количество посетителей «Обломова» могли заказать в этот день по 5 пирожков?

**Ответ:** 21

---

**Задача 6**

**В-1** Решите уравнение

$$|x + |x + |x|| \cdot ||| - y| - y| - y| = 2023.$$

в целых числах. В ответ впишите сумму  $|x| + |y|$  для той пары решений, для которых величина  $|x| + |y|$  минимальна.

**Ответ:** 136

**Решение.** Для первого варианта: заметим, что  $2023 = 7 \cdot 17^2$ .

1) Если  $x \geq 0$ , то первый множитель равен  $3x$  и уравнение решений не имеет.

2) Если  $y \leq 0$ , то второй множитель равен  $-3y$  и уравнение решений не имеет.

3) Пусть  $x < 0$ ,  $y > 0$ . Уравнение примет вид  $-xy = 0$ , откуда возможны решения:  $x = -1$ ;  $y = 2023$ ,  $x = -7$ ;  $y = 289$ ,  $x = -17$ ;  $y = 119$ ,  $x = -119$ ;  $y = 17$ ,  $x = -2023$ ;  $y = 1$ .

$\min(|x| + |y|) = 17 + 119 = 136$ .

В других вариантах:  $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$ . Все решения:  $(-1; 2024)$ ,  $(-2; 1012)$ ,  $(-4; 506)$ ,  $(-8; 253)$ ,  $(-11; 184)$ ,  $(-22; 92)$ ,  $(-44; 46)$  и т.д.  $\min(|x| + |y|) = 44 + 46 = 90$ .

$2021 = 43 \cdot 47$ . Все решения:  $(-1; 2021)$ ,  $(-43; 47)$ ,  $(-47; 43)$ ,  $(-2021; 1)$ .  $\min(|x| + |y|) = 43 + 47 = 90$ .

$2030 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 29$ . Все решения:  $(-1; 2030)$ ,  $(-2; 1015)$ ,  $(-5; 406)$ ,  $(-7; 290)$ ,  $(-10; 203)$ ,  $(-14; 145)$ ,  $(-29; 70)$ ,  $(-35; 58)$ , и т.д.  $\min(|x| + |y|) = 35 + 58 = 93$ .

---

**В-2** Решите уравнение

$$|x + |x + |x|| \cdot ||| - y| - y| - y| = 2024.$$

в целых числах. В ответ впишите сумму  $|x| + |y|$  для той пары решений, для которых величина  $|x| + |y|$  минимальна.

**Ответ:** 90

---

**В-3** Решите уравнение

$$|x + |x + |x|| \cdot ||| - y| - y| - y| = 2021.$$

в целых числах. В ответ впишите сумму  $|x| + |y|$  для той пары решений, для которых величина  $|x| + |y|$  минимальна.

**Ответ:** 90

---

**В-4** Решите уравнение

$$|x + |x + |x|| \cdot ||| - y| - y| - y| = 2030.$$

в целых числах. В ответ впишите сумму  $|x| + |y|$  для той пары решений, для которых величина  $|x| + |y|$  минимальна.

**Ответ:** 93

---

**Задача 7**

**В-1** Сумма первых  $n$  членов последовательности  $\{a_n\}$  определяется формулой

$$S_n = 3^{n-1} - \frac{1}{3}.$$

На сколько процентов 10-й член этой последовательности больше, чем пятый ?

**Ответ:** 24200%

**Решение.** Решение (для первого варианта) По условию  $a_1 = S_1 = 3^0 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ . Также

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 3^{n-1} - 3^{n-2} = 2 \cdot 3^{n-2}.$$

Заметим, что  $a_1$  удовлетворяет последней формуле. Значит, данная последовательность — геометрическая прогрессия со знаменателем  $q = 3$  и первым членом  $a_1 = \frac{2}{3}$ . (Заметим, что тот факт, что это геометрическая прогрессия, здесь несущественен, важно, что найдена формула общего члена). Тогда  $a_{10} = 2 \cdot 3^{10-2} = 2 \cdot 3^8$ ,  $a_5 = 2 \cdot 3^3$ . Первое число больше второго на

$$\frac{2 \cdot 3^8 - 2 \cdot 3^3}{2 \cdot 3^3} \cdot 100\% = (3^5 - 1) \cdot 100\% = 24200\%$$

---

**В-2** Сумма первых  $n$  членов последовательности  $\{a_n\}$  определяется формулой

$$S_n = 4^{n-1} - \frac{1}{4}.$$

На сколько процентов 10-й член этой последовательности больше, чем пятый ?

**Ответ:** 102300%

---

**В-3** Сумма первых  $n$  членов последовательности  $\{a_n\}$  определяется формулой

$$S_n = 3^{n-1} - \frac{1}{3}.$$

На сколько процентов 10-й член этой последовательности больше, чем четвёртый ?

**Ответ:** 72800%

---

**В-4** Сумма первых  $n$  членов последовательности  $\{a_n\}$  определяется формулой

$$S_n = 4^{n-1} - \frac{1}{4}.$$

На сколько процентов 10-й член этой последовательности больше, чем шестой ?

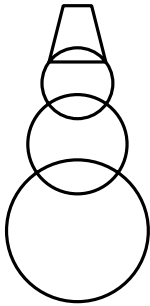
**Ответ:** 25500%

---

**Задача 8**

**В-1** Вася нарисовал снеговика на новогоднем плакате. Снеговик состоит из трех кругов, центры которых лежат на одной вертикальной прямой. Радиусы кругов (снизу вверх) равны 10, 7 и 5. Круги пересекаются под прямым углом, т. е. их касательные в точках пересечения перпендикулярны. На голове у снеговика ведро вверх дном, нарисованное в виде равнобокой трапеции со сторонами 8, 8, 8 и 4.

Какой высоты получился снеговик? Ответ округлить до десятых.



**Ответ:** 41.6

**Решение.** Высота снеговика складывается из пяти слагаемых:

- 1) радиус нижнего круга,
- 2) расстояние между центрами нижнего и среднего кругов,
- 3) расстояние между центрами верхнего и среднего кругов,
- 4) расстояние от центра верхнего круга до нижнего края ведра,
- 5) высота ведра.

Считаем.

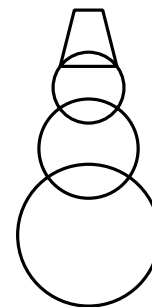
- 1) Радиус нижнего круга равен 10.
- 2) Гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами 10 и 7, т. е.  $\sqrt{149}$ .
- 3) Гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами 5 и 7, т. е.  $\sqrt{74}$ .
- 4) Катет треугольника с гипотенузой 5 и другим катетом  $8/2$ , т. е.  $\sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ .

5) Высота трапеции равна  $\sqrt{8^2 - \left(\frac{8-4}{2}\right)^2} = \sqrt{60}$ .

Итого,  $10 + \sqrt{149} + \sqrt{74} + \sqrt{60} + 3 = 41.55484 \dots \approx 41.6$ .

**В-2** Вася нарисовал снеговика на новогоднем плакате. Снеговик состоит из трех кругов, центры которых лежат на одной вертикальной прямой. Радиусы кругов (снизу вверх) равны 11, 9 и 6. Круги пересекаются под прямым углом, т. е. их касательные в точках пересечения перпендикулярны. На голове у снеговика ведро вверх дном, нарисованное в виде равнобокой трапеции со сторонами 9, 9, 9 и 5.

Какой высоты получился снеговик? Ответ округлить до десятых.



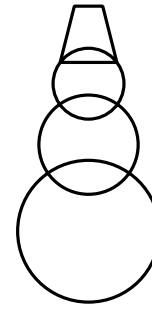
**Ответ:** 48.8

**В-3** Вася нарисовал снеговика на новогоднем плакате. Снеговик состоит из трех кругов, центры которых лежат на одной вертикальной прямой. Радиусы кругов (снизу вверх) равны 10, 8 и 5. Круги пересекаются под прямым углом, т. е. их касательные в точках пересечения перпендикулярны. На голове у снеговика ведро вверх дном, нарисованное в виде равнобоочной трапеции со сторонами 8, 8, 8 и 4.

Какой высоты получился снеговик? Ответ округлить до десятых.

**Ответ:** 43.0

---



**В-4** Вася нарисовал снеговика на новогоднем плакате. Снеговик состоит из трех кругов, центры которых лежат на одной вертикальной прямой. Радиусы кругов (снизу вверх) равны 11, 8 и 6. Круги пересекаются под прямым углом, т. е. их касательные в точках пересечения перпендикулярны. На голове у снеговика ведро вверх дном, нарисованное в виде равнобоочной трапеции со сторонами 9, 9, 9 и 5.

Какой высоты получился снеговик? Ответ округлить до десятых.

**Ответ:** 47.3

---

