

Задача 1

В-1 Ровно в 8:00 от пристани A вниз по течению реки вышел катер и от пристани B , находящейся на расстоянии 72 км от A , навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Второй катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 11:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 3 км/ч?

Ответ: 24

Решение. Если рассмотреть движение относительно реки, то второй катер за время прошел с собственной скоростью путь от пункта B до середины C отрезка AB и обратно. Поэтому его скорость равна $72/(11 - 8)$, причём независимо от скорости течения реки. Ответ: 24.

В-2 Ровно в 9:00 от пристани A вниз по течению реки вышел катер и от пристани B , находящейся на расстоянии 69 км от A , навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Второй катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 12:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 2 км/ч?

Ответ: 23

В-3 Ровно в 7:00 от пристани A вниз по течению реки вышел катер и от пристани B , находящейся на расстоянии 70 км от A , навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Второй катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 12:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 4 км/ч?

Ответ: 14

В-4 Ровно в 6:00 от пристани A вниз по течению реки вышел катер и от пристани B , находящейся на расстоянии 85 км от A , навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Второй катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 11:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 3 км/ч?

Ответ: 17

В-5 Ровно в 8:00 от пристани A вниз по течению реки вышел катер и от пристани B , находящейся на расстоянии 52 км от A , навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Второй катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 10:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 2 км/ч?

Ответ: 26

В-6 Ровно в 9:00 от пристани A вниз по течению реки вышел катер и от пристани B , находящейся на расстоянии 57 км от A , навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Второй катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 12:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 4 км/ч?

Ответ: 19

В-7 Ровно в 7:00 от пристани A вниз по течению реки вышел катер и от пристани B , находящейся на расстоянии 72 км от A , навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Второй катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 11:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 3 км/ч?

Ответ: 18

В-8 Ровно в 6:00 от пристани A вниз по течению реки вышел катер и от пристани B , находящейся на расстоянии 64 км от A , навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Второй катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 10:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 2 км/ч?

Ответ: 16

Задача 2

В-1 Решите уравнение

$$|x + |x + |x|| \cdot || - y| - y| - y| = 2023.$$

в целых числах. В ответ впишите сумму $|x| + |y|$ для той пары решений, для которых величина $|x| + |y|$ минимальна.

Ответ: 136

Решение. Заметим, что $2023 = 7 \cdot 17^2$.

- 1) Если $x \geq 0$, то первый множитель равен $3x$ и уравнение решений не имеет.
 - 2) Если $y \leq 0$, то второй множитель равен $-3y$ и уравнение решений не имеет.
 - 3) Пусть $x < 0$, $y > 0$. Уравнение примет вид $-xy = 0$, откуда возможны решения: $x = -1$; $y = 2023$, $x = -7$; $y = 289$, $x = -17$; $y = 119$, $x = -119$; $y = 17$, $x = -2023$; $y = 1$.
 $\min(|x| + |y|) = 17 + 119 = 136$.
-

В-2 Решите уравнение

$$|x + |x + |x|| \cdot || - y| - y| - y| = 2024.$$

в целых числах. В ответ впишите сумму $|x| + |y|$ для той пары решений, для которых величина $|x| + |y|$ минимальна.

Ответ: 90

В-3 Решите уравнение

$$|x + |x + |x|| \cdot || - y| - y| - y| = 2021.$$

в целых числах. В ответ впишите сумму $|x| + |y|$ для той пары решений, для которых величина $|x| + |y|$ минимальна.

Ответ: 90

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике
Отборочный этап 2023/24 учебного года для 11 класса

В-4 Решите уравнение

$$|x + |x + |x|| \cdot || - y| - y| - y| = 2030.$$

в целых числах. В ответ впишите сумму $|x| + |y|$ для той пары решений, для которых величина $|x| + |y|$ минимальна.

Ответ: 93

В-5 Пусть $S(n)$ — сумма цифр натурального числа n . Решите уравнение

$$n + 3S(n) = 2007.$$

Если решений несколько, в ответе укажите наименьшее из них.

Ответ: 1953

Решение. Пусть $S(n)$ — сумма цифр натурального числа n . Число 2007 кратно 3 и 9. Так как $3S(n)$ делится на 3, то n тоже должно делиться на 3. А значит, $3S(n)$ делится на 9. В таком случае n тоже должно делиться на 9. Докажем, что n — четырехзначное число. Пусть $n < 1000$. Тогда $S(n) < 3 \cdot 9 = 27$. Таким образом, $n + 3S(n) < 1000 + 3 \cdot 27 = 1081 < 2007$. Противоречие. Число n пятизначным тоже быть, очевидно, не может. То есть n — четырехзначное натуральное число, $n \leq 9999$, $S(n) \leq 36$. Тогда $S(n)$ равно 9, 18, 27 либо 36. $n = 2007 - 3S(n)$. Так что нужно проверить варианты, когда n равно $2007 - 108 = 1899$, $2007 - 81 = 1926$, $2007 - 54 = 1953$ и $2007 - 27 = 1980$, и выбрать из них наименьшее подходящее. Если $n = 1899$, то $S(n) = 27$, следовательно $n + 3S(n) = 1899 + 3 \cdot 27 = 2052 \neq 2007$. Если $n = 1926$, то $S(n) = 18$, следовательно $n + 3S(n) = 1926 + 3 \cdot 18 = 1980 \neq 2007$. Если $n = 1953$, то $S(n) = 18$, следовательно $n + 3S(n) = 1953 + 3 \cdot 18 = 2007$. Если $n = 1980$, то $S(n) = 18$, следовательно $n + 3S(n) = 1980 + 3 \cdot 18 = 2034 \neq 2007$. Таким образом, ответ в задаче $n = 1953$.

В-6 Пусть $S(n)$ — сумма цифр натурального числа n . Решите уравнение

$$n + 3S(n) = 2016.$$

Если решений несколько, в ответе укажите наименьшее из них.

Ответ: 1962

В-7 Пусть $S(n)$ — сумма цифр натурального числа n . Решите уравнение

$$n + 3S(n) = 2025.$$

Если решений несколько, в ответе укажите наименьшее из них.

Ответ: 1971

В-8 Пусть $S(n)$ — сумма цифр натурального числа n . Решите уравнение

$$n + 3S(n) = 2034.$$

Если решений несколько, в ответе укажите наименьшее из них.

Ответ: 1980

Задача 3

В-1 Иммануил открыл трёхмерный редактор Blender и создал в нём куб. Потом он поместил в центр каждой грани куба по точке и соединил их в октаэдр. Затем он увеличил полученный октаэдр в $\frac{6}{5}$ раза (центр октаэдра остался на прежнем месте, октаэдр не поворачивался) и удалил из куба всё, что оказалось внутри октаэдра. Какая доля (по объёму) куба осталась? Доведите дробь до несократимой и в ответе укажите сумму её числителя и знаменателя. Или, если ответ иррациональный (только в этом случае) запишите его в виде десятичной дроби, до второго знака после запятой.

Ответ: 429

Решение. Пусть ребро куба равно 2, тогда диагональ октаэдра равна $2k$ ($k = \frac{6}{5}$). Так как $1 < k < 2$, то из грани куба выпирает пирамидальный кончик октаэдра, и выступает он на высоту, равную $k - 1$. Объём одного такого кончика равен $4 \cdot \frac{1}{6} \cdot (k - 1)^3$, а всего их торчит 6 штук, в сумме $4(k - 1)^3$. Объём самого октаэдра легко посчитать, разбив его на кусочки, он равен $\frac{4}{3}k^3$. Объём куба равен $2^3 = 8$.

Сложив и вычтя эти значения в надлежащем порядке (объём куба - (объём октаэдра - объём кончиков)), мы получим объём остатка от куба, и его отношение к объёму куба равно

$$\frac{1}{3}k^3 - \frac{3}{2}k^2 + \frac{3}{2}k + \frac{1}{2}.$$

Подставляя значение $k = \frac{6}{5}$, получим $\frac{179}{250}$, откуда берётся ответ.

В-2 Иммануил открыл трёхмерный редактор Blender и создал в нём куб. Потом он поместил в центр каждой грани куба по точке и соединил их в октаэдр. Затем он увеличил полученный октаэдр в $\frac{7}{5}$ раза (центр октаэдра остался на прежнем месте, октаэдр не поворачивался) и удалил из куба всё, что оказалось внутри октаэдра. Какая доля (по объёму) куба осталась? Доведите дробь до несократимой и в ответе укажите сумму её числителя и знаменателя. Или, если ответ иррациональный (только в этом случае) запишите его в виде десятичной дроби, до второго знака после запятой.

Ответ: 1181

В-3 Иммануил открыл трёхмерный редактор Blender и создал в нём куб. Потом он поместил в центр каждой грани куба по точке и соединил их в октаэдр. Затем он увеличил полученный октаэдр в $\frac{8}{5}$ раза (центр октаэдра остался на прежнем месте, октаэдр не поворачивался) и удалил из куба всё, что оказалось внутри октаэдра. Какая доля (по объёму) куба осталась? Доведите дробь до несократимой и в ответе укажите сумму её числителя и знаменателя. Или, если ответ иррациональный (только в этом случае) запишите его в виде десятичной дроби, до второго знака после запятой.

Ответ: 1069

В-4 Иммануил открыл трёхмерный редактор Blender и создал в нём куб. Потом он поместил в центр каждой грани куба по точке и соединил их в октаэдр. Затем он увеличил полученный октаэдр в $\frac{9}{5}$ раза (центр октаэдра остался на прежнем месте, октаэдр не поворачивался) и удалил из куба всё, что оказалось внутри октаэдра. Какая доля (по объёму) куба осталась? Доведите дробь до несократимой и в ответе укажите сумму её числителя и знаменателя. Или, если ответ иррациональный (только в этом случае) запишите его в виде десятичной дроби, до второго знака после запятой.

Ответ: 321

В-5 Иммануил открыл трёхмерный редактор Blender и создал в нём куб. Потом он поместил в центр каждой грани куба по точке и соединил их в октаэдр. Затем он увеличил полученный

октаэдр в 125 раз (центр октаэдра остался на прежнем месте, октаэдр не поворачивался) и удалил из куба всё, что оказалось внутри октаэдра. Какая доля (по объёму) куба осталась? Доведите дробь до несократимой и в ответе укажите сумму её числителя и знаменателя. Или, если ответ иррациональный (только в этом случае) запишите его в виде десятичной дроби, до второго знака после запятой.

Ответ: 0

В-6 Иммануил открыл трёхмерный редактор Blender и создал в нём куб. Потом он поместил в центр каждой грани куба по точке и соединил их в октаэдр. Затем он увеличил полученный октаэдр в 125 раз (центр октаэдра остался на прежнем месте, октаэдр не поворачивался) и удалил из куба всё, что оказалось внутри октаэдра. Какая доля (по объёму) куба осталась? Доведите дробь до несократимой и в ответе укажите сумму её числителя и знаменателя. Или, если ответ иррациональный (только в этом случае) запишите его в виде десятичной дроби, до второго знака после запятой.

Ответ: 0

В-7 Иммануил открыл трёхмерный редактор Blender и создал в нём куб. Потом он поместил в центр каждой грани куба по точке и соединил их в октаэдр. Затем он увеличил полученный октаэдр в 135 раз (центр октаэдра остался на прежнем месте, октаэдр не поворачивался) и удалил из куба всё, что оказалось внутри октаэдра. Какая доля (по объёму) куба осталась? Доведите дробь до несократимой и в ответе укажите сумму её числителя и знаменателя. Или, если ответ иррациональный (только в этом случае) запишите его в виде десятичной дроби, до второго знака после запятой.

Ответ: 0

В-8 Иммануил открыл трёхмерный редактор Blender и создал в нём куб. Потом он поместил в центр каждой грани куба по точке и соединил их в октаэдр. Затем он увеличил полученный октаэдр в 145 раз (центр октаэдра остался на прежнем месте, октаэдр не поворачивался) и удалил из куба всё, что оказалось внутри октаэдра. Какая доля (по объёму) куба осталась? Доведите дробь до несократимой и в ответе укажите сумму её числителя и знаменателя. Или, если ответ иррациональный (только в этом случае) запишите его в виде десятичной дроби, до второго знака после запятой.

Ответ: 0

В-9 Иммануил открыл трёхмерный редактор Blender и создал в нём куб. Потом он поместил в центр каждой грани куба по точке и соединил их в октаэдр. Затем он увеличил полученный октаэдр в $\frac{11}{5}$ раз (центр октаэдра остался на прежнем месте, октаэдр не поворачивался) и удалил из куба всё, что оказалось внутри октаэдра. Какая доля (по объёму) куба осталась? Доведите дробь до несократимой и в ответе укажите сумму её числителя и знаменателя. Или, если ответ иррациональный (только в этом случае) запишите его в виде десятичной дроби, до второго знака после запятой.

Ответ: 407

Решение. Пусть ребро куба равно 2, тогда диагональ октаэдра равна $2k$ ($k = \frac{11}{5}$). Так как $k > 2$, то из граней октаэдра выпирают вершинки куба. Насколько высоко? Расстояние от центра куба до его вершины равно $\sqrt{3}$. Дальше нужно понять, как связаны величины h и b , где h — высота треугольной пирамиды, полученной отсечением «угла» куба перпендикулярно диагонали куба так, чтобы от ребра куба осталось b . Считаем объём такой пирамидки двумя способами (с основанием — равносторонним треугольником и основанием — прямоугольным треугольником.) Получаем, что $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}b^3 = \frac{1}{3} \cdot h \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}b^2$, то есть $b = \sqrt{3}h$. Из формулы получаем, что расстояние от центра до грани октаэдра равно $\frac{k}{\sqrt{3}}$, то есть вершинки куба выпирают на высоту $\sqrt{3} - \frac{k}{\sqrt{3}}$, а прилегающие к высоте рёбра имеют длину $\sqrt{3} \left(\sqrt{3} - \frac{k}{\sqrt{3}} \right) = 3 - k$.

Объём остатков куба равен $\frac{8}{6}(3 - k)^3$, а отношение его к объёму самого куба равно $\frac{1}{6}(3 - k)^3$. Подставляя значение $k = \frac{11}{5}$, получим $\frac{32}{375}$, откуда берётся ответ.

В-10 Иммануил открыл трёхмерный редактор Blender и создал в нём куб. Потом он поместил в центр каждой грани куба по точке и соединил их в октаэдр. Затем он увеличил полученный октаэдр в $\frac{12}{5}$ раза (центр октаэдра остался на прежнем месте, октаэдр не поворачивался) и удалил из куба всё, что оказалось внутри октаэдра. Какая доля (по объёму) куба осталась? Доведите дробь до несократимой и в ответе укажите сумму её числителя и знаменателя. Или, если ответ иррациональный (только в этом случае) запишите его в виде десятичной дроби, до второго знака после запятой.

Ответ: 259

В-11 Иммануил открыл трёхмерный редактор Blender и создал в нём куб. Потом он поместил в центр каждой грани куба по точке и соединил их в октаэдр. Затем он увеличил полученный октаэдр в $\frac{13}{5}$ раза (центр октаэдра остался на прежнем месте, октаэдр не поворачивался) и удалил из куба всё, что оказалось внутри октаэдра. Какая доля (по объёму) куба осталась? Доведите дробь до несократимой и в ответе укажите сумму её числителя и знаменателя. Или, если ответ иррациональный (только в этом случае) запишите его в виде десятичной дроби, до второго знака после запятой.

Ответ: 379

В-12 Иммануил открыл трёхмерный редактор Blender и создал в нём куб. Потом он поместил в центр каждой грани куба по точке и соединил их в октаэдр. Затем он увеличил полученный октаэдр в $\frac{14}{5}$ раза (центр октаэдра остался на прежнем месте, октаэдр не поворачивался) и удалил из куба всё, что оказалось внутри октаэдра. Какая доля (по объёму) куба осталась? Доведите дробь до несократимой и в ответе укажите сумму её числителя и знаменателя. Или, если ответ иррациональный (только в этом случае) запишите его в виде десятичной дроби, до второго знака после запятой.

Ответ: 751

Задача 4

В-1 Сумма первых n членов последовательности $\{a_n\}$ определяется формулой

$$S_n = 3^{n-1} - \frac{1}{3}.$$

На сколько процентов 10-й член этой последовательности больше, чем пятый ?

Ответ: 24200%

Решение. Решение. По условию $a_1 = S_1 = 3^0 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. Также

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 3^{n-1} - 3^{n-2} = 2 \cdot 3^{n-2}.$$

Заметим, что a_1 удовлетворяет последней формуле. Значит, данная последовательность — геометрическая прогрессия со знаменателем $q = 3$ и первым членом $a_1 = \frac{2}{3}$. (Заметим, что тот факт, что это геометрическая прогрессия, здесь несущественен, важно, что найдена формула общего члена). Тогда $a_{10} = 2 \cdot 3^{10-2} = 2 \cdot 3^8$, $a_5 = 2 \cdot 3^3$. Первое число больше второго на

$$\frac{2 \cdot 3^8 - 2 \cdot 3^3}{2 \cdot 3^3} \cdot 100\% = (3^5 - 1) \cdot 100\% = 24200\%$$

В-2 Сумма первых n членов последовательности $\{a_n\}$ определяется формулой

$$S_n = 4^{n-1} - \frac{1}{4}.$$

На сколько процентов 10-й член этой последовательности больше, чем пятый ?

Ответ: 102300%

В-3 Сумма первых n членов последовательности $\{a_n\}$ определяется формулой

$$S_n = 3^{n-1} - \frac{1}{3}.$$

На сколько процентов 10-й член этой последовательности больше, чем четвёртый ?

Ответ: 72800%

В-4 Сумма первых n членов последовательности $\{a_n\}$ определяется формулой

$$S_n = 4^{n-1} - \frac{1}{4}.$$

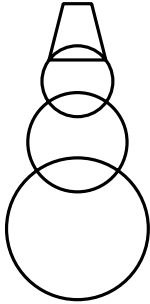
На сколько процентов 10-й член этой последовательности больше, чем шестой ?

Ответ: 25500%

Задача 5

В-1 Вася нарисовал снеговика на новогоднем плакате. Снеговик состоит из трех кругов, центры которых лежат на одной вертикальной прямой. Радиусы кругов (снизу вверх) равны 10, 7 и 5. Круги пересекаются под прямым углом, т. е. их касательные в точках пересечения перпендикулярны. На голове у снеговика ведро вверх дном, нарисованное в виде равнобокой трапеции со сторонами 8, 8, 8 и 4.

Какой высоты получился снеговик? Ответ округлить до десятых.



Ответ: 41.6

Решение. Высота снеговика складывается из пяти слагаемых:

- 1) радиус нижнего круга,
- 2) расстояние между центрами нижнего и среднего кругов,
- 3) расстояние между центрами верхнего и среднего кругов,
- 4) расстояние от центра верхнего круга до нижнего края ведра,
- 5) высота ведра.

Считаем.

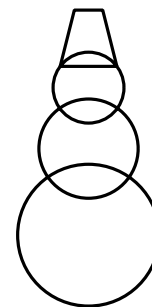
- 1) Радиус нижнего круга равен 10.
- 2) Гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами 10 и 7, т. е. $\sqrt{149}$.
- 3) Гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами 5 и 7, т. е. $\sqrt{74}$.
- 4) Катет треугольника с гипотенузой 5 и другим катетом $8/2$, т. е. $\sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.

5) Высота трапеции равна $\sqrt{8^2 - \left(\frac{8-4}{2}\right)^2} = \sqrt{60}$.

Итого, $10 + \sqrt{149} + \sqrt{74} + \sqrt{60} + 3 = 41.55484 \dots \approx 41.6$.

В-2 Вася нарисовал снеговика на новогоднем плакате. Снеговик состоит из трех кругов, центры которых лежат на одной вертикальной прямой. Радиусы кругов (снизу вверх) равны 11, 9 и 6. Круги пересекаются под прямым углом, т. е. их касательные в точках пересечения перпендикулярны. На голове у снеговика ведро вверх дном, нарисованное в виде равнобокой трапеции со сторонами 9, 9, 9 и 5.

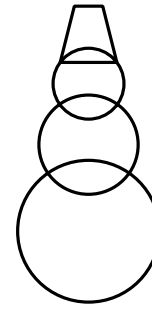
Какой высоты получился снеговик? Ответ округлить до десятых.



Ответ: 48.8

В-3 Вася нарисовал снеговика на новогоднем плакате. Снеговик состоит из трех кругов, центры которых лежат на одной вертикальной прямой. Радиусы кругов (снизу вверх) равны 10, 8 и 5. Круги пересекаются под прямым углом, т. е. их касательные в точках пересечения перпендикулярны. На голове у снеговика ведро вверх дном, нарисованное в виде равнобокой трапеции со сторонами 8, 8, 8 и 4.

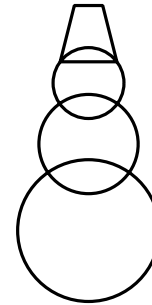
Какой высоты получился снеговик? Ответ округлить до десятых.



Ответ: 43.0

В-4 Вася нарисовал снеговика на новогоднем плакате. Снеговик состоит из трех кругов, центры которых лежат на одной вертикальной прямой. Радиусы кругов (снизу вверх) равны 11, 8 и 6. Круги пересекаются под прямым углом, т. е. их касательные в точках пересечения перпендикулярны. На голове у снеговика ведро вверх дном, нарисованное в виде равнобокой трапеции со сторонами 9, 9, 9 и 5.

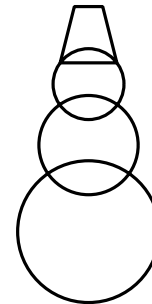
Какой высоты получился снеговик? Ответ округлить до десятых.



Ответ: 47.3

В-5 Вася нарисовал снеговика на новогоднем плакате. Снеговик состоит из трех кругов, центры которых лежат на одной вертикальной прямой. Радиусы кругов (снизу вверх) равны 10, 8 и 5. Круги пересекаются под прямым углом, т. е. их касательные в точках пересечения перпендикулярны. На голове у снеговика ведро вверх дном, нарисованное в виде равнобокой трапеции, у которой боковые стороны и нижнее основание равны 8. Высота снеговика получилась равной 43.

Чему равен диаметр дна у ведра? Ответ округлить до сотых.



Ответ: 4.11

Решение: Высота снеговика складывается из пяти слагаемых:

- 1) радиус нижнего круга,
- 2) расстояние между центрами нижнего и среднего кругов,
- 3) расстояние между центрами верхнего и среднего кругов,
- 4) расстояние от центра верхнего круга до нижнего края ведра,
- 5) высота ведра.

Считаем.

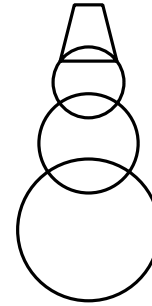
- 1) Радиус нижнего круга равен 10.
- 2) Гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами 10 и 8, т. е. $\sqrt{164}$.
- 3) Гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами 5 и 8, т. е. $\sqrt{89}$.
- 4) Катет треугольника с гипотенузой 5 и другим катетом $8/2$, т. е. $\sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.
- 5) Высота трапеции равна $43 - 10 - \sqrt{164} - \sqrt{89} - 3 = 30 - \sqrt{164} - \sqrt{89}$.

Её верхнее основание равно $8 - 2\sqrt{8^2 - (30 - \sqrt{164} - \sqrt{89})^2} = 4.1084895 \dots \approx 4.11$

В-6 Вася нарисовал снеговика на новогоднем плакате. Снеговик состоит из трех кругов, центры которых лежат на одной вертикальной прямой. Радиусы кругов (снизу вверх) равны 12, 10 и 6. Круги пересекаются под прямым углом, т. е. их касательные в точках пересечения перпендикулярны. На голове у снеговика ведро вверх дном, нарисованное в виде равнобочной трапеции, у которой боковые стороны и нижнее основание равны 9. Высота снеговика получилась равной 52.

Чему равен диаметр дна у ведра? Ответ округлить до сотых.

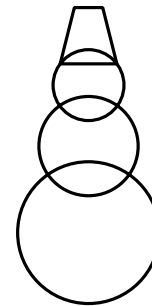
Ответ: 4.78



В-7 Вася нарисовал снеговика на новогоднем плакате. Снеговик состоит из трех кругов, центры которых лежат на одной вертикальной прямой. Радиусы кругов (снизу вверх) равны 11, 7 и 4. Круги пересекаются под прямым углом, т. е. их касательные в точках пересечения перпендикулярны. На голове у снеговика ведро вверх дном, нарисованное в виде равнобочной трапеции, у которой боковые стороны и нижнее основание равны 7. Высота снеговика получилась равной 41.

Чему равен диаметр дна у ведра? Ответ округлить до сотых.

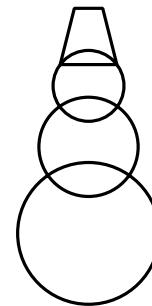
Ответ: 5.56



В-8 Вася нарисовал снеговика на новогоднем плакате. Снеговик состоит из трех кругов, центры которых лежат на одной вертикальной прямой. Радиусы кругов (снизу вверх) равны 10, 8 и 5. Круги пересекаются под прямым углом, т. е. их касательные в точках пересечения перпендикулярны. На голове у снеговика ведро вверх дном, нарисованное в виде равнобочной трапеции, у которой боковые стороны и нижнее основание равны 8. Высота снеговика получилась равной 43.

Чему равен диаметр дна у ведра? Ответ округлить до сотых.

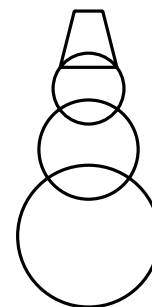
Ответ: 4.11



В-9 Вася нарисовал снеговика на новогоднем плакате. Снеговик состоит из трех кругов, центры которых лежат на одной вертикальной прямой. Радиусы кругов (снизу вверх) равны 12, 10 и 6. Круги пересекаются под прямым углом, т. е. их касательные в точках пересечения перпендикулярны. На голове у снеговика ведро вверх дном, нарисованное в виде равнобочной трапеции, у которой боковые стороны и нижнее основание равны 9. Высота снеговика получилась равной 52.

Чему равен диаметр дна у ведра? Ответ округлить до сотых.

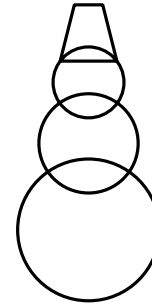
Ответ: 4.78



В-10 Вася нарисовал снеговика на новогоднем плакате. Снеговик состоит из трех кругов, центры которых лежат на одной вертикальной прямой. Радиусы кругов (снизу вверх) равны 11, 7 и 4. Круги пересекаются под прямым углом, т. е. их касательные в точках пересечения перпендикулярны. На голове у снеговика ведро вверх дном, нарисованное в виде равнобоочной трапеции, у которой боковые стороны и нижнее основание равны 7. Высота снеговика получилась равной 41.

Чему равен диаметр дна у ведра? Ответ округлить до сотых.

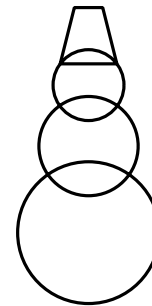
Ответ: 5.56



В-11 Вася нарисовал снеговика на новогоднем плакате. Снеговик состоит из трех кругов, центры которых лежат на одной вертикальной прямой. Радиусы кругов (снизу вверх) равны 11, 8 и 6. Круги пересекаются под прямым углом, т. е. их касательные в точках пересечения перпендикулярны. На голове у снеговика ведро вверх дном, нарисованное в виде равнобоочной трапеции, у которой боковые стороны и нижнее основание равны 8. Высота снеговика получилась равной 47.

Чему равен диаметр дна у ведра? Ответ округлить до сотых.

Ответ: 5.83



Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Отборочный этап 2023/24 учебного года для 11 класса

Задача 6

В-1 Какое наибольшее значение может иметь наименьший угол треугольника α , если его значение может меняться в пределах, заданных условием:

$$\sqrt{2 \cos 2\alpha - 2(\sqrt{3} - 1) \sin \alpha - (2 - \sqrt{3})} \geq \cos 2\alpha + 3 \sin \alpha - 2$$

Ответ укажите в градусах

Ответ: 30

Решение. Наименьший угол треугольника не может быть больше 60° . Воспользуемся формулой $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$, заменим $\sin \alpha = t$. Тогда неравенство примет вид

$$\sqrt{\sqrt{3} - 4t^2 - 2(\sqrt{3} - 1)t} \geq 3t - 2t^2 - 1 \Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{3} + 2t)(1 - 2t)} \geq (1 - 2t)(t - 1).$$

ОДЗ для переменной t — область $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}$. На этой области правая часть неравенства отрицательна (исключая точку $t = \frac{1}{2}$, где она равна нулю). Получается, что неравенство выполнено на всей ОДЗ, и $t = \sin \alpha \leq \frac{1}{2}$. Отсюда получаем максимальное значение в 30 градусов.

В-2 Какое наибольшее значение может иметь наименьший угол треугольника α , если его значение может меняться в пределах, заданных условием:

$$\sqrt{2 \cos 2\alpha - 2(\sqrt{2} - 1) \sin \alpha - (2 - \sqrt{2})} \geq 3 \cos 2\alpha + 7 \sin \alpha - 5$$

Ответ укажите в градусах

Ответ: 30

В-3 Какое наибольшее значение может иметь наименьший угол треугольника α , если его значение может меняться в пределах, заданных условием:

$$\sqrt{2 \cos 2\alpha + 2(\sqrt{3} - 1) \sin \alpha - (2 - \sqrt{3})} \geq \cos 2\alpha + (\sqrt{3} + 2) \sin \alpha - 1 - \sqrt{3}$$

Ответ укажите в градусах

Ответ: 60

В-4 Какое наибольшее значение может иметь наименьший угол треугольника α , если его значение может меняться в пределах, заданных условием:

$$\sqrt{2 \cos 2\alpha + 2(\sqrt{2} - 1) \sin \alpha - (2 - \sqrt{2})} \geq \cos 2\alpha + (\sqrt{2} + 2) \sin \alpha - 1 - \sqrt{2}$$

Ответ укажите в градусах

Ответ: 45

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Отборочный этап 2023/24 учебного года для 11 класса

Задача 7

В-1 Найдите сумму всех значений $x \in [0^\circ, 10^\circ]$ в градусах, при каждом из которых выполнено равенство

$$(4 \cos^2 x - 1)(4 \cos^2 3x - 1)(4 \cos^2 9x - 1)(4 \cos^2 27x - 1) + \sin^2 81x + \cos^2 81x = 0.$$

Эту сумму запишите в виде $\frac{m}{n}$, где m, n взаимно простые натуральные числа. В ответе укажите $m + n$.

Ответ: 950

Решение. Так как

$$4 \cos^2 x - 1 = 3 - 4 \sin^2 x = \frac{3 \sin x - 4 \sin^3 x}{\sin x} = \frac{\sin 3x}{\sin x},$$

то исходное уравнение приводится к виду

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} \frac{\sin 9x}{\sin 3x} \frac{\sin 27x}{\sin 9x} \frac{\sin 81x}{\sin 27x} + 1 = 0.$$

Отсюда $\frac{\sin 81x}{\sin x} = -1$, то есть $\sin 81x = \sin(-x)$, и при этом $\sin x \neq 0$, так как для него значения $\cos^2 x$ равны 1. Поэтому значения x в градусах равны $81x = -x + 360k$ и $81x = 180 + x + 360n$, то есть $x = \frac{180k}{41}$ и $x = \frac{9(1+2n)}{4}$, где $k \neq 41m, k, n, m \in \mathbb{Z}$. В заданный отрезок попадают значения $\frac{180}{41}, \frac{360}{41}, \frac{9}{4}, \frac{27}{4}$. В сумме это $\frac{909}{41}$, в ответ указываем $909 + 41 = 950$.

В-2 Найдите сумму всех значений $x \in [0^\circ, 10^\circ]$ в градусах, при каждом из которых выполнено равенство

$$(4 \cos^2 x - 1)(4 \cos^2 3x - 1)(4 \cos^2 9x - 1)(4 \cos^2 27x - 1) = \sin^2 81x + \cos^2 81x.$$

Эту сумму запишите в виде $\frac{m}{n}$, где m, n взаимно простые натуральные числа. В ответе укажите $m - n$.

Ответ: 1745

В-3 Найдите сумму всех значений $x \in [0^\circ, 10^\circ]$ в градусах, при каждом из которых выполнено равенство

$$(4 \cos^2 x - 1)(4 \cos^2 3x - 1)(4 \cos^2 9x - 1)(4 \cos^2 27x - 1) + \sin^2 81x + \cos^2 81x = 0.$$

Эту сумму запишите в виде $\frac{m}{n}$, где m, n взаимно простые натуральные числа. В ответе укажите $m - n$.

Ответ: 868

В-4 Найдите сумму всех значений $x \in [0^\circ, 10^\circ]$ в градусах, при каждом из которых выполнено равенство

$$(4 \cos^2 x - 1)(4 \cos^2 3x - 1)(4 \cos^2 9x - 1)(4 \cos^2 27x - 1) = \sin^2 81x + \cos^2 81x.$$

Эту сумму запишите в виде $\frac{m}{n}$, где m, n взаимно простые натуральные числа. В ответе укажите $m + n$.

Ответ: 1909

Задача 8

В-1 Решите систему

$$\begin{cases} 1 + 6y = \frac{x}{y} - \sqrt{x-y}, \\ \sqrt{x + \sqrt{x-y} + y} = x + 4y - 2. \end{cases}$$

Если решений бесконечно много в ответ впишите 0. Если решений нет, то тоже впишите 0. Если решений конечное количество, в ответ впишите сумму всех x , при необходимости округлив результат до сотых (если при разных y найдутся одинаковые x — складывайте повторы, слагаемых должно получиться столько же, сколько точек на плоскости подходит под систему).

Ответ: 16.22

Решение. Систему запишем в общем виде

$$\begin{cases} a + 6y = \frac{x}{y} - \sqrt{x-ay}, \\ \sqrt{x + \sqrt{x-ay} - (a-2)y} = x + by - 2. \end{cases}$$

Коэффициенты такие, что $a + b = 5$

Сделаем замену $\sqrt{x-ay} = t \geq 0$. Тогда $x = t^2 + ay$. Первое уравнение системы примет вид

$$ay + 6y^2 = t^2 + ay - ty \Leftrightarrow t^2 - ty - 6y^2 = 0.$$

Рассматривая его как квадратное уравнение относительно t , получаем $t = -2y$ ($y \leq 0$) или $t = 3y$ ($y \geq 0$).

Второе уравнение после замены имеет вид

$$\sqrt{t^2 + 2y + t} = t^2 + (a+b)y - 2.$$

1) Пусть $t = -2y$. Второе уравнение примет вид

$$\sqrt{t^2} = 4y^2 + (a+b)y - 2.$$

Тогда $-2y = 4y^2 + 5y - 2 = 0 \Leftrightarrow 4y^2 + 7y - 2 = 0$, откуда $y = -2$ или $y = \frac{1}{4}$ (не подходит). Следовательно, $x = 16 - 2a$.

2) Пусть $t = 3y$. Второе уравнение примет вид

$$\sqrt{9y^2 + 5y} = 9y^2 + 5y - 2 \Leftrightarrow (\sqrt{9y^2 + 5y} + 1)(\sqrt{9y^2 + 5y} - 2) = 0,$$

откуда $9y^2 + 5y - 4 = 0$. Следовательно, $y = -1$ (не подходит), $y = \frac{4}{9}$, $x = \frac{16}{9} + \frac{4a}{9} = \frac{16+4a}{9}$.

Отметим, что совпадающих значений x не нашлось.

Числа в вариантах:

$$a = 1, b = 4 \text{ сумма} = \frac{146}{9} \approx 16, 22.$$

$$a = -2, b = 7, \text{ сумма} = \frac{188}{9} \approx 20, 89.$$

$$a = 3, b = 2, \text{ сумма} = \frac{118}{9} \approx 13, 11.$$

$$a = -3, b = 8, \text{ сумма} = \frac{202}{9} \approx 22, 44.$$

$$a = 4, b = 1, \text{ сумма} = \frac{104}{9} \approx 11, 56.$$

$$a = -1, b = 6, \text{ сумма} = \frac{58}{3} \approx 19, 33.$$

В-2 Решите систему

$$\begin{cases} -2 + 6y = \frac{x}{y} - \sqrt{x+2y}, \\ \sqrt{x + \sqrt{x+2y} + 4y} = x + 7y - 2. \end{cases}$$

Если решений бесконечно много в ответ впишите 0. Если решений нет, то тоже впишите 0. Если решений конечное количество, в ответ впишите сумму всех x , при необходимости округлив результат до сотых (если при разных y найдутся одинаковые x — складывайте повторы, слагаемых должно получиться столько же, сколько точек на плоскости подходит под систему).

Ответ: 20.89

Решение. Систему запишем в общем виде

$$\begin{cases} a + 6y = \frac{x}{y} - \sqrt{x - ay}, \\ \sqrt{x + \sqrt{x - ay} - (a - 2)y} = x + by - 2. \end{cases}$$

Коэффициенты такие, что $a + b = 5$

Сделаем замену $\sqrt{x - ay} = t \geq 0$. Тогда $x = t^2 + ay$. Первое уравнение системы примет вид

$$ay + 6y^2 = t^2 + ay - ty \Leftrightarrow t^2 - ty - 6y^2 = 0.$$

Рассматривая его как квадратное уравнение относительно t , получаем $t = -2y$ ($y \leq 0$) или $t = 3y$ ($y \geq 0$).

Второе уравнение после замены имеет вид

$$\sqrt{t^2 + 2y + t} = t^2 + (a + b)y - 2.$$

1) Пусть $t = -2y$. Второе уравнение примет вид

$$\sqrt{t^2} = 4y^2 + (a + b)y - 2.$$

Тогда $-2y = 4y^2 + 5y - 2 = 0 \Leftrightarrow 4y^2 + 7y - 2 = 0$, откуда $y = -2$ или $y = \frac{1}{4}$ (не подходит). Следовательно, $x = 16 - 2a$.

2) Пусть $t = 3y$. Второе уравнение примет вид

$$\sqrt{9y^2 + 5y} = 9y^2 + 5y - 2 \Leftrightarrow (\sqrt{9y^2 + 5y} + 1)(\sqrt{9y^2 + 5y} - 2) = 0,$$

откуда $9y^2 + 5y - 4 = 0$. Следовательно, $y = -1$ (не подходит), $y = \frac{4}{9}$, $x = \frac{16}{9} + \frac{4a}{9} = \frac{16+4a}{9}$.

Отметим, что совпадающих значений x не нашлось.

Числа в вариантах:

$$a = 1, b = 4 \text{ сумма} = \frac{146}{9} \approx 16, 22.$$

$$a = -2, b = 7, \text{ сумма} = \frac{188}{9} \approx 20, 89.$$

$$a = 3, b = 2, \text{ сумма} = \frac{118}{9} \approx 13, 11.$$

$$a = -3, b = 8, \text{ сумма} = \frac{202}{9} \approx 22, 44.$$

$$a = 4, b = 1, \text{ сумма} = \frac{104}{9} \approx 11, 56.$$

$$a = -1, b = 6, \text{ сумма} = \frac{58}{3} \approx 19, 33.$$

В-3 Решите систему

$$\begin{cases} 3 + 6y = \frac{x}{y} - \sqrt{x - 3y}, \\ \sqrt{x + \sqrt{x - 3y} - y} = x + 2y - 2. \end{cases}$$

Если решений бесконечно много в ответ впишите 0. Если решений нет, то тоже впишите 0. Если решений конечное количество, в ответ впишите сумму всех x , при необходимости округлив результат до сотых (если при разных y найдутся одинаковые x — складывайте повторы, слагаемых должно получиться столько же, сколько точек на плоскости подходит под систему).

Ответ: 13.11

Решение. Систему запишем в общем виде

$$\begin{cases} a + 6y = \frac{x}{y} - \sqrt{x - ay}, \\ \sqrt{x + \sqrt{x - ay} - (a - 2)y} = x + by - 2. \end{cases}$$

Коэффициенты такие, что $a + b = 5$

Сделаем замену $\sqrt{x - ay} = t \geq 0$. Тогда $x = t^2 + ay$. Первое уравнение системы примет вид

$$ay + 6y^2 = t^2 + ay - ty \Leftrightarrow t^2 - ty - 6y^2 = 0.$$

Рассматривая его как квадратное уравнение относительно t , получаем $t = -2y$ ($y \leq 0$) или $t = 3y$ ($y \geq 0$).

Второе уравнение после замены имеет вид

$$\sqrt{t^2 + 2y + t} = t^2 + (a + b)y - 2.$$

1) Пусть $t = -2y$. Второе уравнение примет вид

$$\sqrt{t^2} = 4y^2 + (a + b)y - 2.$$

Тогда $-2y = 4y^2 + 5y - 2 = 0 \Leftrightarrow 4y^2 + 7y - 2 = 0$, откуда $y = -2$ или $y = \frac{1}{4}$ (не подходит). Следовательно, $x = 16 - 2a$.

2) Пусть $t = 3y$. Второе уравнение примет вид

$$\sqrt{9y^2 + 5y} = 9y^2 + 5y - 2 \Leftrightarrow (\sqrt{9y^2 + 5y} + 1)(\sqrt{9y^2 + 5y} - 2) = 0,$$

откуда $9y^2 + 5y - 4 = 0$. Следовательно, $y = -1$ (не подходит), $y = \frac{4}{9}$, $x = \frac{16}{9} + \frac{4a}{9} = \frac{16+4a}{9}$.

Отметим, что совпадающих значений x не нашлось.

Числа в вариантах:

$$a = 1, b = 4 \text{ сумма} = \frac{146}{9} \approx 16, 22.$$

$$a = -2, b = 7, \text{ сумма} = \frac{188}{9} \approx 20, 89.$$

$$a = 3, b = 2, \text{ сумма} = \frac{118}{9} \approx 13, 11.$$

$$a = -3, b = 8, \text{ сумма} = \frac{202}{9} \approx 22, 44.$$

$$a = 4, b = 1, \text{ сумма} = \frac{104}{9} \approx 11, 56.$$

$$a = -1, b = 6, \text{ сумма} = \frac{58}{3} \approx 19, 33.$$

В-4 Решите систему

$$\begin{cases} -3 + 6y = \frac{x}{y} - \sqrt{x + 3y}, \\ \sqrt{x + \sqrt{x + 3y} + 5y} = x + 8y - 2. \end{cases}$$

Если решений бесконечно много в ответ впишите 0. Если решений нет, то тоже впишите 0. Если решений конечное количество, в ответ впишите сумму всех x , при необходимости округлив результат до сотых (если при разных y найдутся одинаковые x — складывайте повторы, слагаемых должно получиться столько же, сколько точек на плоскости подходит под систему).

Ответ: 22.44

Решение. Систему запишем в общем виде

$$\begin{cases} a + 6y = \frac{x}{y} - \sqrt{x - ay}, \\ \sqrt{x + \sqrt{x - ay} - (a - 2)y} = x + by - 2. \end{cases}$$

Коэффициенты такие, что $a + b = 5$

Сделаем замену $\sqrt{x - ay} = t \geq 0$. Тогда $x = t^2 + ay$. Первое уравнение системы примет вид

$$ay + 6y^2 = t^2 + ay - ty \Leftrightarrow t^2 - ty - 6y^2 = 0.$$

Рассматривая его как квадратное уравнение относительно t , получаем $t = -2y$ ($y \leq 0$) или $t = 3y$ ($y \geq 0$).

Второе уравнение после замены имеет вид

$$\sqrt{t^2 + 2y + t} = t^2 + (a + b)y - 2.$$

1) Пусть $t = -2y$. Второе уравнение примет вид

$$\sqrt{t^2} = 4y^2 + (a + b)y - 2.$$

Тогда $-2y = 4y^2 + 5y - 2 = 0 \Leftrightarrow 4y^2 + 7y - 2 = 0$, откуда $y = -2$ или $y = \frac{1}{4}$ (не подходит).
Следовательно, $x = 16 - 2a$.

2) Пусть $t = 3y$. Второе уравнение примет вид

$$\sqrt{9y^2 + 5y} = 9y^2 + 5y - 2 \Leftrightarrow (\sqrt{9y^2 + 5y} + 1)(\sqrt{9y^2 + 5y} - 2) = 0,$$

откуда $9y^2 + 5y - 4 = 0$. Следовательно, $y = -1$ (не подходит), $y = \frac{4}{9}$, $x = \frac{16}{9} + \frac{4a}{9} = \frac{16+4a}{9}$.

Отметим, что совпадающих значений x не нашлось.

Числа в вариантах:

$$a = 1, b = 4 \text{ сумма} = \frac{146}{9} \approx 16, 22.$$

$$a = -2, b = 7, \text{ сумма} = \frac{188}{9} \approx 20, 89.$$

$$a = 3, b = 2, \text{ сумма} = \frac{118}{9} \approx 13, 11.$$

$$a = -3, b = 8, \text{ сумма} = \frac{202}{9} \approx 22, 44.$$

$$a = 4, b = 1, \text{ сумма} = \frac{104}{9} \approx 11, 56.$$

$$a = -1, b = 6, \text{ сумма} = \frac{58}{3} \approx 19, 33.$$

В-5 Решите систему

$$\begin{cases} 4 + 6y = \frac{x}{y} - \sqrt{x - 4y}, \\ \sqrt{x + \sqrt{x - 4y}} - 2y = x + y - 2. \end{cases}$$

Если решений бесконечно много в ответ впишите 0. Если решений нет, то тоже впишите 0. Если решений конечное количество, в ответ впишите сумму всех x , при необходимости округлив результат до сотых (если при разных y найдутся одинаковые x — складывайте повторы, слагаемых должно получиться столько же, сколько точек на плоскости подходит под систему).

Ответ: 11.56

Решение. Систему запишем в общем виде

$$\begin{cases} a + 6y = \frac{x}{y} - \sqrt{x - ay}, \\ \sqrt{x + \sqrt{x - ay}} - (a - 2)y = x + by - 2. \end{cases}$$

Коэффициенты такие, что $a + b = 5$

Сделаем замену $\sqrt{x - ay} = t \geq 0$. Тогда $x = t^2 + ay$. Первое уравнение системы примет вид

$$ay + 6y^2 = t^2 + ay - ty \Leftrightarrow t^2 - ty - 6y^2 = 0.$$

Рассматривая его как квадратное уравнение относительно t , получаем $t = -2y$ ($y \leq 0$) или $t = 3y$ ($y \geq 0$).

Второе уравнение после замены имеет вид

$$\sqrt{t^2 + 2y + t} = t^2 + (a + b)y - 2.$$

1) Пусть $t = -2y$. Второе уравнение примет вид

$$\sqrt{t^2} = 4y^2 + (a + b)y - 2.$$

Тогда $-2y = 4y^2 + 5y - 2 = 0 \Leftrightarrow 4y^2 + 7y - 2 = 0$, откуда $y = -2$ или $y = \frac{1}{4}$ (не подходит).
Следовательно, $x = 16 - 2a$.

2) Пусть $t = 3y$. Второе уравнение примет вид

$$\sqrt{9y^2 + 5y} = 9y^2 + 5y - 2 \Leftrightarrow (\sqrt{9y^2 + 5y} + 1)(\sqrt{9y^2 + 5y} - 2) = 0,$$

откуда $9y^2 + 5y - 4 = 0$. Следовательно, $y = -1$ (не подходит), $y = \frac{4}{9}$, $x = \frac{16}{9} + \frac{4a}{9} = \frac{16+4a}{9}$.

Отметим, что совпадающих значений x не нашлось.

Числа в вариантах:

$$a = 1, b = 4 \text{ сумма} = \frac{146}{9} \approx 16, 22.$$

$$a = -2, b = 7, \text{ сумма} = \frac{188}{9} \approx 20, 89.$$

$$a = 3, b = 2, \text{ сумма} = \frac{118}{9} \approx 13, 11.$$

$$a = -3, b = 8, \text{ сумма} = \frac{202}{9} \approx 22, 44.$$

$$a = 4, b = 1, \text{ сумма} = \frac{104}{9} \approx 11, 56.$$

$$a = -1, b = 6, \text{ сумма} = \frac{58}{3} \approx 19, 33.$$

В-6 Решите систему

$$\begin{cases} -1 + 6y = \frac{x}{y} - \sqrt{x+y}, \\ \sqrt{x + \sqrt{x+y} + 3y} = x + 6y - 2. \end{cases}$$

Если решений бесконечно много в ответ впишите 0. Если решений нет, то тоже впишите 0. Если решений конечное количество, в ответ впишите сумму всех x , при необходимости округлив результат до сотых (если при разных y найдутся одинаковые x — складывайте повторы, слагаемых должно получиться столько же, сколько точек на плоскости подходит под систему).

Ответ: 19.33

Решение. Систему запишем в общем виде

$$\begin{cases} a + 6y = \frac{x}{y} - \sqrt{x - ay}, \\ \sqrt{x + \sqrt{x - ay} - (a - 2)y} = x + by - 2. \end{cases}$$

Коэффициенты такие, что $a + b = 5$

Сделаем замену $\sqrt{x - ay} = t \geq 0$. Тогда $x = t^2 + ay$. Первое уравнение системы примет вид

$$ay + 6y^2 = t^2 + ay - ty \Leftrightarrow t^2 - ty - 6y^2 = 0.$$

Рассматривая его как квадратное уравнение относительно t , получаем $t = -2y$ ($y \leq 0$) или $t = 3y$ ($y \geq 0$).

Второе уравнение после замены имеет вид

$$\sqrt{t^2 + 2y + t} = t^2 + (a + b)y - 2.$$

1) Пусть $t = -2y$. Второе уравнение примет вид

$$\sqrt{t^2} = 4y^2 + (a + b)y - 2.$$

Тогда $-2y = 4y^2 + 5y - 2 = 0 \Leftrightarrow 4y^2 + 7y - 2 = 0$, откуда $y = -2$ или $y = \frac{1}{4}$ (не подходит). Следовательно, $x = 16 - 2a$.

2) Пусть $t = 3y$. Второе уравнение примет вид

$$\sqrt{9y^2 + 5y} = 9y^2 + 5y - 2 \Leftrightarrow (\sqrt{9y^2 + 5y} + 1)(\sqrt{9y^2 + 5y} - 2) = 0,$$

откуда $9y^2 + 5y - 4 = 0$. Следовательно, $y = -1$ (не подходит), $y = \frac{4}{9}$, $x = \frac{16}{9} + \frac{4a}{9} = \frac{16+4a}{9}$.

Отметим, что совпадающих значений x не нашлось.

Числа в вариантах:

$$a = 1, b = 4 \text{ сумма} = \frac{146}{9} \approx 16, 22.$$

$$a = -2, b = 7, \text{ сумма} = \frac{188}{9} \approx 20, 89.$$

$$a = 3, b = 2, \text{ сумма} = \frac{118}{9} \approx 13, 11.$$

$$a = -3, b = 8, \text{ сумма} = \frac{202}{9} \approx 22, 44.$$

$$a = 4, b = 1, \text{ сумма} = \frac{104}{9} \approx 11, 56.$$

$$a = -1, b = 6, \text{ сумма} = \frac{58}{3} \approx 19, 33.$$