Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

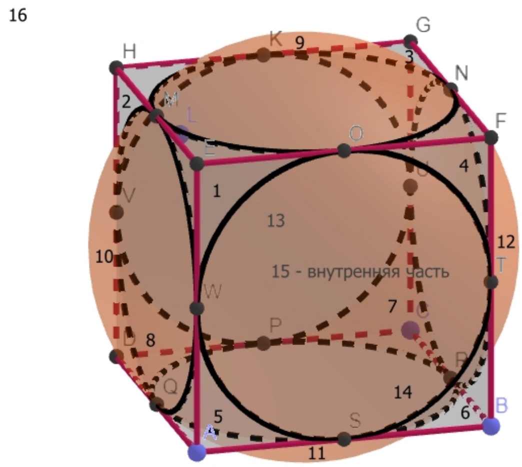
Отборочный этап 2023/24 учебного года для 7–8 класса

Задача 1

В-1 На какое наибольшее число частей могут разбить пространство две поверхности, если одна из них — сфера, а другая — куб? Они могут располагаться как угодно и быть любых размеров.

Ответ: 16

Решение. Пример такого разбиения: впишите в грани куба окружности (они будут касаться друг друга в серединах рёбер куба), и проведите сферу, проходящую через них. Тогда пространство разобьётся на такие части: 1 часть лежит снаружи и куба, и сферы. 1 часть лежит внутри и куба, и сферы. 6 частей лежат внутри сферы и снаружи куба (6 сферических сегментов). И 8 частей лежат внутри куба, но снаружи сферы (уголки куба). В сумме $1{+}1{+}6{+}8 = 16$.



Почему этот способ оптимален? Все области делятся так: есть 1 лежащая снаружи обеих фигур. Есть 1, лежащая внутри обеих фигур. А остальные делятся на 2 вида: те, что принадлежат только шару, и те, что принадлежат только кубу. Куб может отсечь от сферы не более 6 кусков (просто по числу плоскостей). Сфера может отсечь от куба не более восьми (по числу углов-вершин). Каждому отсечённому куску может принадлежать сколько-то углов — и нуля углов у куска быть не может. Предложенный способ оптимален по обоим параметрам.

В-2 На какое наибольшее число частей могут разбить пространство две поверхности, если одна из них — сфера, а другая — усечённый конус? Они могут располагаться как угодно и быть любых размеров.

Ответ: 7

Решение. Пример такого разбиения: нарисуйте окружность и равнобедренную трапецию так, чтобы они пересекались в 8 точках, и чтобы ось конуса совпадала с диаметром сферы. Потом повращайте этот рисунок вокруг оси, чтобы окружность очертила сферу, а трапеция очертила усечённый конус. В таком случае пространство разобьётся на такие части: 1 часть снаружи сферы и конуса, 1 часть внутри и сферы, и конуса. Снаружи конуса, но внутри сферы лежат 3 части — 2 сферических сегмента, выступающих из оснований конуса, и 1 поясок, полученный вращением сегмента сферы, отсечённого боковой стороной трапеции (на плоском рисунке ему соответствуют 2 части, но в объёме они соединены.) Снаружи сферы, но внутри конуса лежат 2 куска — 2 пояска, полученных вращениями углов трапеции (на плоском рисунке это 4 части, но в объёме их две). В сумме получаем $1{+}1{+}2{+}1{+}2 = 7$.

Почему этот способ оптимален? Все области делятся так: есть 1 лежащая снаружи обеих фигур. Есть 1, лежащая внутри обеих фигур. А остальные делятся на 2 вида: те, что принадлежат только конусу, и те, что принадлежат только сфере. Конус от сферы может отсечь не более

3 кусков — два основаниями, один — боковой поверхностью. Сфера от конуса может отсечь не более 2 кусков. Почему? Посмотрим на окружности — границы основания конуса. Каждая из них либо внутри сферы, либо частично внутри (дуга внутри и дуга снаружи), либо полностью снаружи. Каждому отсечнному от конуса куску пространства принадлежит либо одна, либо две таких дуги (или окружности). Значит, не более двух. Предложенный способ оптимален по обоим параметрам.

В-3 На какое наибольшее число частей могут разбить пространство две поверхности, если одна из них — сфера, а другая — треугольная пирамида? Они могут располагаться как угодно и быть любых размеров

Ответ: 10

Решение. Пример такого разбиения: пирамидой берём правильный, равносторонний тетраэдр. Вписываем в его стороны окружности (окружности будут касаться друг друга в серединах рёбер), и через эти окружности проводим сферу. В таком случае пространство разобьётся на такие части: 1 лежит снаружи и тетраэдра, и сферы. 1 лежит внутри и тетраэдра, и сферы. Ещё есть 4 сферических сегмента, по числу граней (вне тетраэдра, но внутри сферы) и 4 уголка по числу вершин (внутри тетраэдра, но снаружи сферы). В сумме $1+1+4+4 = 10$.

Почему этот способ оптимален? Все области делятся так: есть 1 лежащая снаружи обеих фигур. Есть 1, лежащая внутри обеих фигур. А остальные делятся на 2 вида: те, что принадлежат только шару, и те, что принадлежат только пирамиде. Пирамида может отсечь от сферы не более 4 кусков (просто по числу плоскостей). Сфера может отсечь от пирамиды не более четырёх (по числу углов-вершин). Каждому отсечённому куску может принадлежать сколько-то углов — и нуля углов у куска быть не может. Предложенный способ оптимален по обоим параметрам.

В-4 На какое наибольшее число частей могут разбить пространство две поверхности, если одна из них — куб, а другая — конус? Они могут располагаться как угодно и быть любых размеров

Ответ: 12

Решение. Пример такого разбиения: делим куб пополам плоскостью, параллельной основанию. Получим квадрат в сечении. Опишем вокруг него окружность. Потом рисуем вторую окружность, вписанную в верхнюю грань куба. Проводим через эти две окружности конус (большая, первая, будет его основанием). Тогда пространство разобьётся на такие куски: 1 снаружи конуса и куба, 1 внутри конуса и куба. Снаружи конуса, но внутри куба будут 5 кусков: 4 уголка куба от верхней грани и ещё 1 — половина куба, выступающая вниз из основания конуса. Аналогично, будет 5 кусков снаружи куба, но внутри конуса: 1 вершинка конуса, стоящая на верхней грани куба и 4 куска конуса, выступающих из боковых сторон. В сумме получается $1+1+5+5 = 12$.

Решившим предлагается подумать над доказательством оптимальности самостоятельно, пользуясь идеями предыдущих вариантов, хотя формально доказательство оптимальности не требовалось.

Задача 2

В-1 Найдите наименьшее четырёхзначное число, дающее остаток 3 при делении на 11, остаток 6 при делении на 15 и остаток 17 при делении на 26.

Ответ: 3501

Решение. Для начала отметим, что 11, 15 и 26 попарно взаимно просты. $11 \cdot 15 \cdot 26 = 4290$, так что если мы найдём некое число x, дающее такие остатки при делениях на 11, 15, 26, то $x + 4290 \cdot k$ ($k \in \mathbb{Z}$) будут давать такие же остатки. (Пока мы не обращаем внимания на количество знаков в числе). Если мы найдём хоть какое-нибудь число, дающее нужные остатки, то найдём и остальные, вычитая/прибавляя 4290.

Давайте искать X в виде $A \cdot 15 \cdot 26 + B \cdot 11 \cdot 26 + C \cdot 11 \cdot 15$. В таком случае, учитывая остатки отделений на 11, 15, 26, можно выписать следующие равенства: $A \cdot 15 \cdot 26 = a \cdot 11 + 3, B \cdot 11 \cdot 26 = b \cdot 15 + 6, C \cdot 11 \cdot 15 = c \cdot 26 + 17$. Или же: $11 \cdot a = 390A - 3, 15 \cdot b = 286B - 6, 26 \cdot c = 165C - 17$. Нам сгодятся любые целые числа, удовлетворяющие этим равенствам. Подбираем: $A = 5 (a = 117)$, $B = 6, C = 25$. Тогда $X = 5 \cdot 15 \cdot 26 + 6 \cdot 11 \cdot 26 + 25 \cdot 11 \cdot 15 = 7791$. Вычитая 4290, получаем другое число с такими остатками: 3501. Других таких 4-хзначных чисел нет.

В-2 Найдите наибольшее четырёхзначное число, дающее остаток 3 при делении на 11, остаток 6 при делении на 15 и остаток 17 при делении на 26.

Ответ: 7791

В-3 Найдите предпоследнее четырёхзначное число, дающее остаток 3 при делении на 11, остаток 6 при делении на 15 и остаток 17 при делении на 26.

Ответ: 3501

В-4 Найдите второе четырёхзначное число, дающее остаток 3 при делении на 11, остаток 6 при делении на 15 и остаток 17 при делении на 26.

Ответ: 7791

Задача 3

В-1 Ровно в 8:00 от пристани A вниз по течению реки вышел катер и от пристани B, находящейся на расстоянии 72 км от А, навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Второй катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 11:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 3 км/ч?

Ответ: 24

Решение. Если рассмотреть движение относительно реки, то второй катер за время прошел с собственной скоростью путь от пункта B до середины C отрезка AB и обратно. Поэтому его скорость равна $72/(11 - 8)$, причём независимо от скорости течения реки. Ответ: 24.

B-2 Ровно в 9:00 от пристани A вниз по течению реки вышел катер и от пристани B, находящейся на расстоянии 69 км от A, навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Второй катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 12:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 2 км/ч?

Ответ: 23

B-3 Ровно в 7:00 от пристани A вниз по течению реки вышел катер и от пристани B, находящейся на расстоянии 70 км от A, навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Второй катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 12:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 4 км/ч?

Ответ: 14

B-4 Ровно в 6:00 от пристани A вниз по течению реки вышел катер и от пристани B, находящейся на расстоянии 85 км от A, навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Второй катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 11:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 3 км/ч?

Ответ: 17

B-5 Ровно в 8:00 от пристани A вниз по течению реки вышел катер и от пристани B, находящейся на расстоянии 52 км от A, навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Второй катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 10:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 2 км/ч?

Ответ: 26

B-6 Ровно в 9:00 от пристани A вниз по течению реки вышел катер и от пристани B, находящейся на расстоянии 57 км от A, навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Второй катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 12:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 4 км/ч?

Ответ: 19

B-7 Ровно в 7:00 от пристани A вниз по течению реки вышел катер и от пристани B, находящейся на расстоянии 72 км от A, навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Второй катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 11:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 3 км/ч?

Ответ: 18

B-8 Ровно в 6:00 от пристани A вниз по течению реки вышел катер и от пристани B, находящейся на расстоянии 64 км от A, навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Второй катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 10:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 2 км/ч?

Ответ: 16

Задача 4

В-1 Оля собирается в гости к подруге Маше к пяти часам вечера. Оля и Маша живут на одной стороне одной улицы: Оля — в 5 минутах ходьбы от ближайшей автобусной остановки, а Маша — в 6. Между их остановками есть ещё три остановки. Автобус ходит каждые 15 минут, и Оля рассчитала, что если она придёт на остановку в правильное время, то будет у Маши точно вовремя. В автобусе Оля погрузилась в чтение и не заметила, как уехала на 2 остановки дальше, чем живёт Маша. Она вышла из автобуса и перешла на противоположную сторону улицы, чтобы сесть на автобус, идущий в обратном направлении, но тот как раз в этот момент отъехал от остановки. Оле пришлось ждать следующего автобуса на 1 минуту дольше, чем она ехала на автобусе до этого. На следующем автобусе Оля доехала до нужной остановки и дошла до дома своей подруги. На сколько секунд Оля опоздала к Маше, если известно, что автобус проезжает каждую остановку за одно и то же время, а переход на другую сторону улицы занимает у Оли полминуты?

Ответ: 1520

Решение. Оля ехала до первого выхода из автобуса $(4+2)x$ минут, где x — время, за которое автобус проезжает одну остановку. Ждать второго автобуса ей пришлось 15 минут, причем из условия имеем $(4+2)x+1=15$, откуда $x=\frac{7}{3}$.

План по времени (в минутах): $5+6+4x=4x+11$.

Фактически затраченное время: $5+6+(4+2+2)x+15+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=8x+27$. (Полминуты мы добавили ещё раз, так как, если по плану она бы шла от автобуса без пересечения проезжей части, то после возвращения по другой стороне ей пришлось снова пересечь улицу).

Опоздание = факт – план = $4x+16=\frac{4\cdot 7}{3}+16$ минут, или 1520 секунд.

В-2 Оля собирается в гости к подруге Маше к пяти часам вечера. Оля и Маша живут на одной стороне одной улицы: Оля — в 7 минутах ходьбы от ближайшей автобусной остановки, а Маша — в 8. Между их остановками есть ещё четыре остановки. Автобус ходит каждые 16 минут, и Оля рассчитала, что если она придёт на остановку в правильное время, то будет у Маши точно вовремя. В автобусе Оля погрузилась в чтение и не заметила, как уехала на одну остановку дальше, чем живёт Маша. Она вышла из автобуса и перешла на противоположную сторону улицы, чтобы сесть на автобус, идущий в обратном направлении, но тот как раз в этот момент отъехал от остановки. Оле пришлось ждать следующего автобуса на 2 минуты дольше, чем она ехала на автобусе до этого. На следующем автобусе Оля доехала до нужной остановки и дошла до дома своей подруги. На сколько секунд Оля опоздала к Маше, если известно, что автобус проезжает каждую остановку за одно и то же время, а переход на другую сторону улицы занимает у Оли полминуты?

Ответ: 1300

В-3 Оля собирается в гости к подруге Маше к пяти часам вечера. Оля и Маша живут на одной стороне одной улицы: Оля — в 9 минутах ходьбы от ближайшей автобусной остановки, а Маша — в 10. Между их остановками есть ещё пять остановок. Автобус ходит каждые 20 минут, и Оля рассчитала, что если она придёт на остановку в правильное время, то будет у Маши точно вовремя. В автобусе Оля погрузилась в чтение и не заметила, как уехала на 2 остановки дальше, чем живёт Маша. Она вышла из автобуса и перешла на противоположную сторону улицы, чтобы сесть на автобус, идущий в обратном направлении, но тот как раз в этот момент отъехал от остановки. Оле пришлось ждать следующего автобуса на 3 минуты дольше, чем она ехала на автобусе до этого. На следующем автобусе Оля доехала до нужной остановки и дошла до дома своей подруги. На сколько секунд Оля опоздала к Маше, если известно, что автобус проезжает каждую остановку за одно и то же время, а переход на другую сторону улицы занимает у Оли полминуты?

Ответ: 1770

В-4 Оля собирается в гости к подруге Маше к пяти часам вечера. Оля и Маша живут на одной стороне одной улицы: Оля — в 11 минутах ходьбы от ближайшей автобусной остановки, а Маша — в 12. Между их остановками есть ещё шесть остановок. Автобус ходит каждые 18 минут, и Оля рассчитала, что если она придёт на остановку в правильное время, то будет у Маши точно вовремя. В автобусе Оля погрузилась в чтение и не заметила, как уехала на 1 остановку дальше, чем живёт Маша. Она вышла из автобуса и перешла на противоположную сторону улицы, чтобы сесть на автобус, идущий в обратном направлении, но тот как раз в этот момент отъехал от остановки. Оле пришлось ждать следующего автобуса на 1 минуту дольше, чем она ехала на автобусе до этого. На следующем автобусе Оля доехала до нужной остановки и дошла до дома своей подруги. На сколько секунд Оля опоздала к Маше, если известно, что автобус проезжает каждую остановку за одно и то же время, а переход на другую сторону улицы занимает у Оли полминуты?

Ответ: 1395

Задача 5

В-3 Пусть $S(n)$ — сумма цифр натурального числа n. Решите уравнение

$$n + 4S(n) = 2025.$$

Если решений несколько, в ответе укажите наименьшее из них.

Ответ: 1953

Решение. Сначала оценим, сколько знаков должно иметь неизвестное число n. Одно-, двух-, трёхзначное число не смогло бы дать сумму 2025, оно слишком маленькое. Пятизначное и более число, наоборот, слишком большое. Значит, n четырёхзначное, и давайте обозначим его цифры как a, b, c, d.

$$n = \overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d.$$

Тогда $S(n) = a + b + c + d$, а само уравнение примет вид

$$(1000a + 100b + 10c + d) + 4(a + b + c + d) = 2025,$$

$$1004a + 104b + 14c + 5d = 2025.$$

Цифра a может быть 1 или 2, потому что для $a \geq 3$ сумма слева заведомо больше числа справа. Мы хотим найти наименьший вариант, поэтому сначала выбираем 1. (Если такое решение найдется, то случай $a = 2$ можно не рассматривать.) Получим

$$104b + 14c + 5d = 2025 - 1004 = 1021.$$

Прикинем, в каких пределах может находиться b. Наибольшее возможное значение для $14c + 5d$ равно $14 \cdot 9 + 5 \cdot 9 = 171$. Значит, известно, что

$$104b \geqslant 1021 - 171 = 850.$$

Значит, из всех цифр на место b может подойти только 9. Тогда

$$14c + 5d = 1021 - 9 \cdot 104 = 85.$$

В каких пределах может находиться c? Наибольшее возможное значение $5d$ равно $5 \cdot 9 = 45$, то есть $14c \geqslant 85 - 45 = 40$. То есть $c \geqslant 3$, и начнём перебирать варианты по возрастанию, начиная с этого числа. $3 \cdot 14 + 5d = 85$ и $4 \cdot 14 + 5d = 85$ в целых числах не решатся, а вот при $c = 5$ всё сходится: $5 \cdot 14 + 5d = 85$, $d = \frac{85-70}{5} = 3$. Отсюда получается ответ 1953.

В-1 Пусть $S(n)$ — сумма цифр натурального числа n. Решите уравнение

$$n + 3S(n) = 2025.$$

Если решений несколько, в ответе укажите наименьшее из них.

Ответ: 1971

В-2 Пусть $S(n)$ — сумма цифр натурального числа n. Решите уравнение

$$n + 2S(n) = 2025.$$

Если решений несколько, в ответе укажите наименьшее из них.

Ответ: 1977

В-4 Пусть $S(n)$ — сумма цифр натурального числа n. Решите уравнение

$$n + 5S(n) = 2025.$$

Если решений несколько, в ответе укажите наименьшее из них.

Ответ: 1935

Задача 6

В-1 Имеется набор из нескольких подряд идущих натуральных чисел. Известно, что их сумма в 30 раз больше минимального числа в наборе и в 20 раз больше максимального числа в наборе. Сколько чисел в этом наборе?

Ответ: 24

Решение. Пусть n, $n+1$, $\ldots$, $n+k$ — данный набор (всего $k+1$ чисел). Тогда их сумма равна $n(k+1) + \frac{k(k+1)}{2} = 30n = 20(n+k)$. Значит, $n = 2k$, поэтому $\frac{5}{2}k(k+1) = 60k$, откуда $k+1 = \frac{120}{5} = 24$.

В-2 Имеется набор из нескольких подряд идущих натуральных чисел. Известно, что их сумма в 45 раз больше минимального числа в наборе и в 30 раз больше максимального числа в наборе. Сколько чисел в этом наборе?

Ответ: 36

В-3 Имеется набор из нескольких подряд идущих натуральных чисел. Известно, что их сумма в 60 раз больше минимального числа в наборе и в 40 раз больше максимального числа в наборе. Сколько чисел в этом наборе?

Ответ: 48

В-4 Имеется набор из нескольких подряд идущих натуральных чисел. Известно, что их сумма в 75 раз больше минимального числа в наборе и в 50 раз больше максимального числа в наборе. Сколько чисел в этом наборе?

Ответ: 60

Задача 7

В-1 Найдите наименьшее возможное значение суммы 10 различных натуральных чисел, если известно, что она нечётна, а произведение любых 5 слагаемых в ней чётно.

Ответ: 65

Решение. Из условия следует, что среди рассматриваемых 10 чисел не более 4 нечётных, а поскольку сумма нечётна, то нечётных чисел либо 1, либо 3. Сумма будет наименьшей, если брать первые подряд идущие чётные и нечётные числа. Если нечётное число одно, то получим $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 18 = 91$, а если нечётных 3, то получим $1 + 3 + 5 + 2 + 4 + 6 + \ldots + 14 = 65$, это и есть наименьшая возможная сумма.

В-2 Найдите наименьшее возможное значение суммы 12 различных натуральных чисел, если известно, что она нечётна, а произведение любых 5 слагаемых в ней чётно.

Ответ: 99

В-3 Найдите наименьшее возможное значение суммы 11 различных натуральных чисел, если известно, что она нечётна, а произведение любых 5 слагаемых в ней чётно.

Ответ: 81

В-4 Найдите наименьшее возможное значение суммы 14 различных натуральных чисел, если известно, что она нечётна, а произведение любых 7 слагаемых в ней чётно.

Ответ: 115
