

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Отборочный этап 2023/24 учебного года для 9 класса

Задача 1

В-1 Числа x, y таковы, что $\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = 5$. Найдите $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} + \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

Ответ: 2.9

Решение. По условию, $\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{(x+y)^2 + (x-y)^2}{(x-y)(x+y)} = 2\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} = 5$, поэтому $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} + \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{5}{2} + \frac{2}{5} = 2.9$.

В-2 Числа x, y таковы, что $\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = 10$. Найдите $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} + \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

Ответ: 5.2

В-3 Числа x, y таковы, что $\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = 20$. Найдите $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} + \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

Ответ: 10.1

В-4 Числа x, y таковы, что $\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = 8$. Найдите $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} + \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

Ответ: 4.25

Задача 2

В-1 Ровно в 8:00 от пристани A вниз по течению реки вышел катер и от пристани B , находящейся на расстоянии 72 км от A , навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Второй катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 11:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 3 км/ч?

Ответ: 24

Решение. Если рассмотреть движение относительно реки, то второй катер за время прошел с собственной скоростью путь от пункта B до середины C отрезка AB и обратно. Поэтому его скорость равна $72/(11-8)$, причём независимо от скорости течения реки. Например, в первом варианте ответ: 24.

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Отборочный этап 2023/24 учебного года для 9 класса

В-2 Ровно в 9:00 от пристани A вниз по течению реки вышел катер и от пристани B , находящейся на расстоянии 69 км от A , навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Второй катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 12:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 2 км/ч?

Ответ: 23

В-3 Ровно в 7:00 от пристани A вниз по течению реки вышел катер и от пристани B , находящейся на расстоянии 70 км от A , навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Второй катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 12:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 4 км/ч?

Ответ: 14

В-4 Ровно в 6:00 от пристани A вниз по течению реки вышел катер и от пристани B , находящейся на расстоянии 85 км от A , навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Второй катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 11:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 3 км/ч?

Ответ: 17

В-5 Ровно в 8:00 от пристани A вниз по течению реки вышел катер и от пристани B , находящейся на расстоянии 52 км от A , навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Второй катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 10:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 2 км/ч?

Ответ: 26

В-6 Ровно в 9:00 от пристани A вниз по течению реки вышел катер и от пристани B , находящейся на расстоянии 57 км от A , навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Второй катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 12:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 4 км/ч?

Ответ: 19

В-7 Ровно в 7:00 от пристани A вниз по течению реки вышел катер и от пристани B , находящейся на расстоянии 72 км от A , навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Второй катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 11:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 3 км/ч?

Ответ: 18

В-8 Ровно в 6:00 от пристани A вниз по течению реки вышел катер и от пристани B , находящейся на расстоянии 64 км от A , навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Второй катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 10:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 2 км/ч?

Ответ: 16

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Отборочный этап 2023/24 учебного года для 9 класса

Задача 3

В-3 Пусть $S(n)$ — сумма цифр натурального числа n . Решите уравнение

$$n + 4S(n) = 2025.$$

Если решений несколько, в ответе укажите наименьшее из них.

Ответ: 1953

Решение. Сначала оценим, сколько знаков должно иметь неизвестное число n . Одно-, двух-, трёхзначное число не смогло бы дать сумму 2025, оно слишком маленькое. Пятизначное и более число, наоборот, слишком большое. Значит, n четырёхзначное, и давайте обозначим его цифры как a, b, c, d .

$$n = \overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d.$$

Тогда $S(n) = a + b + c + d$, а само уравнение примет вид

$$(1000a + 100b + 10c + d) + 4(a + b + c + d) = 2025,$$

$$1004a + 104b + 14c + 5d = 2025.$$

Цифра a может быть 1 или 2, потому что для $a \geq 3$ сумма слева заведомо больше числа справа. Мы хотим найти наименьший вариант, поэтому сначала выбираем 1. (Если такое решение найдется, то случай $a = 2$ можно не рассматривать.) Получим

$$104b + 14c + 5d = 2025 - 1004 = 1021.$$

Прикинем, в каких пределах может находиться b . Наибольшее возможное значение для $14c + 5d$ равно $14 \cdot 9 + 5 \cdot 9 = 171$. Значит, известно, что

$$104b \geq 1021 - 171 = 850.$$

Значит, из всех цифр на место b может подойти только 9. Тогда

$$14c + 5d = 1021 - 9 \cdot 104 = 85.$$

В каких пределах может находиться c ? Наибольшее возможное значение $5d$ равно $5 \cdot 9 = 45$, то есть $14c \geq 85 - 45 = 40$. То есть $c \geq 3$, и начнём перебирать варианты по возрастанию, начиная с этого числа. $3 \cdot 14 + 5d = 85$ и $4 \cdot 14 + 5d = 85$ в целых числах не решаются, а вот при $c = 5$ всё сходится: $5 \cdot 14 + 5d = 85$, $d = \frac{85-70}{5} = 3$. Отсюда получается ответ 1953.

В-1 Пусть $S(n)$ — сумма цифр натурального числа n . Решите уравнение

$$n + 3S(n) = 2025.$$

Если решений несколько, в ответе укажите наименьшее из них.

Ответ: 1971

В-2 Пусть $S(n)$ — сумма цифр натурального числа n . Решите уравнение

$$n + 2S(n) = 2025.$$

Если решений несколько, в ответе укажите наименьшее из них.

Ответ: 1977

В-4 Пусть $S(n)$ — сумма цифр натурального числа n . Решите уравнение

$$n + 5S(n) = 2025.$$

Если решений несколько, в ответе укажите наименьшее из них.

Ответ: 1935

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Отборочный этап 2023/24 учебного года для 9 класса

Задача 4

В-1 Имеется набор из нескольких подряд идущих натуральных чисел. Известно, что их сумма в 30 раз больше минимального числа в наборе и в 20 раз больше максимального числа в наборе. Сколько чисел в этом наборе?

Ответ: 24

Решение. (для 1 варианта) Пусть $n, n + 1, \dots, n + k$ — данный набор (всего $k + 1$ чисел). Тогда их сумма равна $n(k+1) + \frac{k(k+1)}{2} = 30n = 20(n+k)$. Значит, $n = 2k$, поэтому $\frac{5}{2}k(k+1) = 60k$, откуда $k + 1 = \frac{120}{5} = 24$.

В-2 Имеется набор из нескольких подряд идущих натуральных чисел. Известно, что их сумма в 45 раз больше минимального числа в наборе и в 30 раз больше максимального числа в наборе. Сколько чисел в этом наборе?

Ответ: 36

В-3 Имеется набор из нескольких подряд идущих натуральных чисел. Известно, что их сумма в 60 раз больше минимального числа в наборе и в 40 раз больше максимального числа в наборе. Сколько чисел в этом наборе?

Ответ: 48

В-4 Имеется набор из нескольких подряд идущих натуральных чисел. Известно, что их сумма в 75 раз больше минимального числа в наборе и в 50 раз больше максимального числа в наборе. Сколько чисел в этом наборе?

Ответ: 60

Задача 5

В-1 У Нади в аквариуме живут 5 рыбок. Каждый день в обед она насыпает им 30 граммов корма. Каждая рыбка съедает пропорциональное ее весу количество корма, причем к вечеру масса каждой рыбки увеличивается на 0.1% от съеденного. Сегодня утром массы рыбок в граммах были таковы: (1, 3, 4, 6, 14). Какова будет масса самой тяжелой рыбки через 60 дней вечером?

Ответ: 14.9

Решение. Можно считать, что есть всего две рыбки: самая тяжелая и сумма всех остальных. После этого ответ вычисляется просто: $\frac{XKY}{2 \cdot 100} + M_N$. (Где X — масса корма в день, K — число дней, Y — процент увеличения массы, M_N — масса самой тяжелой рыбки).

В-2 У Нади в аквариуме живут 5 рыбок. Каждый день в обед она насыпает им 25 граммов корма. Каждая рыбка съедает пропорциональное ее весу количество корма, причем к вечеру масса каждой рыбки увеличивается на 0.2% от съеденного. Сегодня утром массы рыбок в граммах были таковы: (2, 3, 3, 7, 15). Какова будет масса самой тяжелой рыбки через 62 дней вечером?

Ответ: 16.55

В-3 У Нади в аквариуме живут 6 рыбок. Каждый день в обед она насыпает им 30 граммов корма. Каждая рыбка съедает пропорциональное ее весу количество корма, причем к вечеру масса каждой рыбки увеличивается на 0.1% от съеденного. Сегодня утром массы рыбок в граммах были таковы: (1, 3, 4, 4, 9, 21). Какова будет масса самой тяжелой рыбки через 64 дней вечером?

Ответ: 21.96

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Отборочный этап 2023/24 учебного года для 9 класса

В-4 У Нади в аквариуме живут 6 рыбок. Каждый день в обед она насыпает им 25 граммов корма. Каждая рыбка съедает пропорциональное ее весу количество корма, причем к вечеру масса каждой рыбки увеличивается на 0.2% от съеденного. Сегодня утром массы рыбок в граммах были таковы: (2, 3, 6, 9, 9, 29). Какова будет масса самой тяжелой рыбки через 66 дней вечером?

Ответ: 30.65

Задача 6

В-1 Найдите наименьшее возможное значение суммы 10 различных натуральных чисел, если известно, что она нечётна, а произведение любых 5 слагаемых в ней чётно.

Ответ: 65

Решение. Из условия следует, что среди рассматриваемых 10 чисел не более 4 нечётных, а поскольку сумма нечётна, то нечётных чисел либо 1, либо 3. Сумма будет наименьшей, если брать первые подряд идущие чётные и нечётные числа. Если нечётное число одно, то получим $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 18 = 91$, а если нечётных 3, то получим $1 + 3 + 5 + 2 + 4 + 6 + \dots + 14 = 65$, это и есть наименьшая возможная сумма.

В-2 Найдите наименьшее возможное значение суммы 12 различных натуральных чисел, если известно, что она нечётна, а произведение любых 5 слагаемых в ней чётно.

Ответ: 99

В-3 Найдите наименьшее возможное значение суммы 11 различных натуральных чисел, если известно, что она нечётна, а произведение любых 5 слагаемых в ней чётно.

Ответ: 81

В-4 Найдите наименьшее возможное значение суммы 14 различных натуральных чисел, если известно, что она нечётна, а произведение любых 7 слагаемых в ней чётно.

Ответ: 115

Задача 7

В-1 В ресторане «Обломов» выпекают 3 вида пирожков: с мясом, с рыбой, с грибами. Повар обратил внимание, что 25 ноября среди тех, кто заказывал по 4 пирожка, не повторился ни один набор пирожков. Какое максимальное количество посетителей «Обломова» могли заказать в этот день по 4 пирожка?

Ответ: 15

Решение. Решение. Задача на число сочетаний с повторениями. Количество выбираемых элементов $r = 4$. Количество видов продукции $n = 3$. То есть, количество «перегородок» $n - 1 = 2$.

Воспользуемся формулой $C_{r+n-1}^r = \frac{(r+n-1)!}{r! \cdot (n-1)!} = C_6^4 = 15$

В-2 В ресторане «Обломов» выпекают 4 вида пирожков: с мясом, с рыбой, с грибами и с капустой. Повар обратил внимание, что 25 ноября среди тех, кто заказывал по 5 пирожков, не повторился ни один набор пирожков. Какое максимальное количество посетителей «Обломова» могли заказать в этот день по 5 пирожков?

Ответ: 56

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Отборочный этап 2023/24 учебного года для 9 класса

В-3 В ресторане «Обломов» выпекают 4 вида пирожков: с мясом, с рыбой, с грибами и с капустой. Повар обратил внимание, что 25 ноября среди тех, кто заказывал по 4 пирожка, не повторился ни один набор пирожков. Какое максимальное количество посетителей «Обломова» могли заказать в этот день по 4 пирожка?

Ответ: 35

В-4 В ресторане «Обломов» выпекают 3 вида пирожков: с мясом, с рыбой, с грибами. Повар обратил внимание, что 25 ноября среди тех, кто заказывал по 5 пирожков, не повторился ни один набор пирожков. Какое максимальное количество посетителей «Обломова» могли заказать в этот день по 5 пирожков?

Ответ: 21

Задача 8

В-1 Найдите наименьшее значение выражения $(a + 2)(b + 2)(c + 2)$, если a, b, c — положительные числа, удовлетворяющие условию $abc = 1$.

Ответ: 27

Решение. По неравенству о средних имеем

$$(a + 2)(b + 2)(c + 2) = (a + 1 + 1)(b + 1 + 1)(c + 1 + 1) \geq 3a^{\frac{1}{3}}3b^{\frac{1}{3}}3c^{\frac{1}{3}} = 27(abc)^{\frac{1}{3}},$$

причём равенство достигается при $a = b = c = 1$.

В-2 Найдите наименьшее значение выражения $(a + 3)(b + 3)(c + 3)$, если a, b, c — положительные числа, удовлетворяющие условию $abc = 1$.

Ответ: 64

В-3 Найдите наименьшее значение выражения $(a + 4)(b + 4)(c + 4)$, если a, b, c — положительные числа, удовлетворяющие условию $abc = 8$.

Ответ: 216

В-4 Найдите наименьшее значение выражения $(a + 6)(b + 6)(c + 6)$, если a, b, c — положительные числа, удовлетворяющие условию $abc = 27$.

Ответ: 729
