

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Заключительный этап 2024/25 учебного года для 10 класса

Задача 1

В-1 Решите неравенство

$$\sqrt{\log_2^2 x + 3 \log_2 x} - \sqrt{\log_2^2 x + 3 \log_2 x - 4} \geq \log_2 x + 1.$$

В ответ запишите сумму всех целых значений функции $f(x_0) = 16x_0$, где x_0 — решение неравенства.

Задача 2

В-1 Биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке O . Прямая AO пересекает описанную окружность треугольника OBC в точках O и M . Найдите длину секущей OM , если $BC = 6$, $AB : AC = 3 : 1$, и $\angle BAC = 60^\circ$.

Задача 3

В-1 Решите неравенство

$$\sqrt{\sqrt{\cos x} + 2\sqrt{-3 \sin x}} > 2\sqrt{\sqrt{\cos x} - \sqrt{-3 \sin x}}.$$

Задача 4

В-1 При каких значениях параметра a уравнение

$$|x + 1 - a| + |4^x - a| = 4^x - x - 1$$

имеет на промежутке $[-1; 1]$ единственное решение?

Задача 5

В-1 На каждой стороне белого кубика сидит по жуку. Кубик бросили, и жуки переполошились — каждый выбрал наугад одну из 4-х соседних граней и переполз туда.

С какой вероятностью кубик не изменит своего первоначального вида?

Задача 6

В-1 На чертеже есть парабола и три точки A, B, C . Из каждой точки к параболе проведены две перпендикулярные друг другу касательные. Расстояние от вершины O параболы до прямой AC равно 2. Найдите площадь треугольника OAB , если $AC = 4$, а $BC = 3$.

Задача 7

В-1 Назовем натуральное число счастливым, если все его цифры можно разбить на две группы, сумма цифр в каждой из которых одинакова. Примеры: 38221 ($3 + 2 + 2 + 1 = 8$); 5678 ($5 + 8 = 6 + 7$). Назовем число суперсчастливым, если оно счастливое и следующее за ним целое число тоже счастливое. Найдите количество суперсчастливых чисел на отрезке $[400; 2400]$.

Задача 8

В-1 Вася нарисовал на доске замкнутую кривую $ABCD$, состоящую из четырех звеньев: AB - дуга окружности, меньшая полуокружности, BC - отрезок, CD - дуга окружности, большая полуокружности, DA - отрезок, таким образом, что любые два соседних звена перпендикулярны друг другу. Петя нарисовал кривую данного вида так, чтобы длины всех звеньев совпадали. Какие тогда будут углы у дуг AB и DC ?

Примечание: прямая перпендикулярна дуге окружности, если прямая перпендикулярна касательной к окружности.