

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике
Заключительный этап 2024/25 учебного года для 11 класса

Задача 1

В-1 Решите уравнение

$$\sqrt{4x^2 - 12x + 9} + \sqrt{x^2 - 6x + 9} + \left(\sqrt{-(x-2)}\right)^2 = \sqrt{3 + \sqrt{8}} - \sqrt{3 - \sqrt{8}}.$$

В-2 Решите уравнение

$$\sqrt{4x^2 + 12x + 9} + \sqrt{x^2 + 6x + 9} + \left(\sqrt{(x+2)}\right)^2 = \sqrt{4 + \sqrt{12}} - \sqrt{4 - \sqrt{12}}.$$

В-4 Решите уравнение

$$\sqrt{4x^2 + 12x + 9} + \sqrt{9x^2 + 12x + 4} - \left(\sqrt{-(x+1)}\right)^2 = \sqrt{7 + \sqrt{24}} - \sqrt{7 - \sqrt{24}}.$$

Задача 2

В-1 Укажите наименьшее положительное значение a , при котором неравенство

$$2^{5-\frac{1}{x}} \geq a + \sin 2^x$$

не имеет ни одного решения $x > 0$.

В-2 Укажите наименьшее положительное значение a , при котором неравенство

$$3^{5-\frac{1}{x}} \geq a + \sin 4^x$$

не имеет ни одного решения $x > 0$.

В-3 Укажите наименьшее положительное значение a , при котором неравенство

$$5^{3-\frac{1}{x}} \geq a + \sin 3^x$$

не имеет ни одного решения $x > 0$.

В-4 Укажите наименьшее положительное значение a , при котором неравенство

$$4^{5-\frac{1}{x}} \geq a + \sin 2^x$$

не имеет ни одного решения $x > 0$.

Задача 3

В-1 В окружность радиуса 3 вписан четырёхугольник, три стороны которого равны $3, 3, 3\sqrt{2}$. Найдите максимально возможную площадь такого четырёхугольника.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике
Заключительный этап 2024/25 учебного года для 11 класса

В-2 В окружность радиуса 4 вписан четырёхугольник, три стороны которого равны 4, 4, $4\sqrt{2}$.
Найдите максимально возможную площадь такого четырёхугольника.

Ответ:

В-3 В окружность радиуса 5 вписан четырёхугольник, три стороны которого равны 5, 5, $5\sqrt{2}$.
Найдите максимально возможную площадь такого четырёхугольника.

Ответ:

В-4 В окружность радиуса 6 вписан четырёхугольник, три стороны которого равны 6, 6, $6\sqrt{2}$.
Найдите максимально возможную площадь такого четырёхугольника.

Ответ:

Задача 4

В-1 Найдите все решения уравнения

$$\cos^3(\pi x) + \cos^3(2\pi x) - \cos^3(4\pi x) = (\cos(\pi x) + \cos(2\pi x) - \cos(4\pi x))^3,$$

принадлежащие отрезку $[0.3; 1.6]$.

В-2 Найдите все решения уравнения

$$\sin^3(\pi x) + \sin^3(2\pi x) - \sin^3(4\pi x) = (\sin(\pi x) + \sin(2\pi x) - \sin(4\pi x))^3,$$

принадлежащие отрезку $[0.3; 1.8]$.

Ответ:

В-3 Найдите все решения уравнения

$$\cos^3(\pi x) - \cos^3(2\pi x) + \cos^3(4\pi x) = (\cos(\pi x) - \cos(2\pi x) + \cos(4\pi x))^3,$$

принадлежащие отрезку $[0.3; 1.8]$.

Ответ:

В-4 Найдите все решения уравнения

$$\sin^3(\pi x) - \sin^3(2\pi x) + \sin^3(4\pi x) = (\sin(\pi x) - \sin(2\pi x) + \sin(4\pi x))^3,$$

принадлежащие отрезку $[0.3; 1.6]$.

Ответ:

Задача 5

В-1 Даны три функции

$$f_1(x) = (x + a_1)(x^2 + b_1x + 6),$$

$$f_2(x) = (x + a_2)(x^2 + b_2x + 8),$$

$$f_3(x) = (x + a_3)(x^2 + b_3x + 12)$$

(здесь $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$ — положительные числа).

Для каждого действительного x выполняется условие $f_1(x) = f_2(x) = f_3(x)$.

Найдите значение суммы $a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3$.

В-2 Даны три функции

$$f_1(x) = (x + a_1)(x^2 + b_1x + 6),$$

$$f_2(x) = (x + a_2)(x^2 + b_2x + 14),$$

$$f_3(x) = (x + a_3)(x^2 + b_3x + 21)$$

(здесь $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$ — положительные числа).

Для каждого действительного x выполняется условие $f_1(x) = f_2(x) = f_3(x)$.

Найдите значение суммы $a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3$.

Ответ:

В-3 Даны три функции

$$f_1(x) = (x + a_1)(x^2 + b_1x + 12),$$

$$f_2(x) = (x + a_2)(x^2 + b_2x + 18),$$

$$f_3(x) = (x + a_3)(x^2 + b_3x + 24)$$

(здесь $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$ — положительные числа).

Для каждого действительного x выполняется условие $f_1(x) = f_2(x) = f_3(x)$.

Найдите значение суммы $a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3$.

Ответ:

В-4 Даны три функции

$$f_1(x) = (x + a_1)(x^2 + b_1x + 12),$$

$$f_2(x) = (x + a_2)(x^2 + b_2x + 15),$$

$$f_3(x) = (x + a_3)(x^2 + b_3x + 20)$$

(здесь $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$ — положительные числа).

Для каждого действительного x выполняется условие $f_1(x) = f_2(x) = f_3(x)$.

Найдите значение суммы $a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3$.

Ответ:

Задача 6

В-1 Газонная поливалка равномерно разбрызгивает вокруг себя воду в круге радиуса $4 - 2\sqrt{2}$. На границе этого круга расположена другая такая же поливалка. А ровно посередине между двумя поливалками находится вход в нору. Мышь, хозяйка норы, хочет вернуться домой, но не хочет сильно вымокнуть.

Найдите длину пути, на котором мышь намокнет меньше всего.

Мышь может менять направление бега, но её скорость постоянна, и под душем двух поливалок мышь мокнет вдвое быстрее.

В-2 Газонная поливалка равномерно разбрызгивает вокруг себя воду в круге радиуса $\frac{1}{2+\sqrt{2}}$. На границе этого круга расположена другая такая же поливалка. А ровно посередине между двумя поливалками находится вход в нору. Мышь, хозяйка норы, хочет вернуться домой, но не хочет сильно вымокнуть.

Найдите длину пути, на котором мышь намокнет меньше всего.

Мышь может менять направление бега, но её скорость постоянна, и под душем двух поливалок мышь мокнет вдвое быстрее.

Ответ:

В-3 Газонная поливалка равномерно разбрызгивает вокруг себя воду в круге радиуса $\frac{2-\sqrt{2}}{5}$. На границе этого круга расположена другая такая же поливалка. А ровно посередине между двумя поливалками находится вход в нору. Мышь, хозяйка норы, хочет вернуться домой, но не хочет сильно вымокнуть.

Найдите длину пути, на котором мышь намокнет меньше всего.

Мышь может менять направление бега, но её скорость постоянна, и под душем двух поливалок мышь мокнет вдвое быстрее.

Ответ:

В-4 Газонная поливалка равномерно разбрызгивает вокруг себя воду в круге радиуса $\frac{3}{2+\sqrt{2}}$. На границе этого круга расположена другая такая же поливалка. А ровно посередине между двумя поливалками находится вход в нору. Мышь, хозяйка норы, хочет вернуться домой, но не хочет сильно вымокнуть.

Найдите длину пути, на котором мышь намокнет меньше всего.

Мышь может менять направление бега, но её скорость постоянна, и под душем двух поливалок мышь мокнет вдвое быстрее.

Ответ:

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Заключительный этап 2024/25 учебного года для 11 класса

Задача 7

В-1 Первооткрыватель летел над джунглями на вертолётё и заметил забытый храм инков. Храм выстроен в форме правильной усечённой пирамиды с квадратными основаниями — сторона нижнего основания равна 2048 и.е., сторона верхней площадки равна 486 и.е. (и.е. — инкские единицы длины). Высоту храма путешественник измерить не сумел, поэтому посадил вертолёт на верхней площадке и начал спускаться по боковой поверхности пирамиды, начиная от угла. Спускался он не напрямую — склон для этого слишком крут — а наискосок, по линии, угол наклона которой к поверхности земли равен 45° . Когда он добирался до бокового ребра, он переходил через ребро и шёл по следующей грани, под таким же углом 45° к поверхности земли.

Он закончил спуск ровно у вершины нижнего основания пирамиды, насчитав по пути 5 сторон (иными словами, его путь выглядит как ломаная, и в этой ломаной получилось 5 отрезков). Какой высоты (в и.е.) был храм?

В-2 Первооткрыватель летел над джунглями на вертолётё и заметил забытый храм инков. Храм выстроен в форме правильной усечённой пирамиды с квадратными основаниями — сторона нижнего основания равна 256 и.е., сторона верхней площадки равна 8 и.е. (и.е. — инкские единицы длины). Высоту храма путешественник измерить не сумел, поэтому посадил вертолёт на верхней площадке и начал спускаться по боковой поверхности пирамиды, начиная от угла. Спускался он не напрямую — склон для этого слишком крут — а наискосок, по линии, угол наклона которой к поверхности земли равен 45° . Когда он добирался до бокового ребра, он переходил через ребро и шёл по следующей грани, под таким же углом 45° к поверхности земли.

Он закончил спуск ровно у вершины нижнего основания пирамиды, насчитав по пути 5 сторон (иными словами, его путь выглядит как ломаная, и в этой ломаной получилось 5 отрезков). Какой высоты (в и.е.) был храм?

Ответ:

В-3 Первооткрыватель летел над джунглями на вертолётё и заметил забытый храм инков. Храм выстроен в форме правильной усечённой пирамиды с квадратными основаниями — сторона нижнего основания равна 6144 и.е., сторона верхней площадки равна 1458 и.е. (и.е. — инкские единицы длины). Высоту храма путешественник измерить не сумел, поэтому посадил вертолёт на верхней площадке и начал спускаться по боковой поверхности пирамиды, начиная от угла. Спускался он не напрямую — склон для этого слишком крут — а наискосок, по линии, угол наклона которой к поверхности земли равен 30° . Когда он добирался до бокового ребра, он переходил через ребро и шёл по следующей грани, под таким же углом 30° к поверхности земли.

Он закончил спуск ровно у вершины нижнего основания пирамиды, насчитав по пути 5 сторон (иными словами, его путь выглядит как ломаная, и в этой ломаной получилось 5 отрезков). Какой высоты (в и.е.) был храм?

Ответ:

В-4 Первооткрыватель летел над джунглями на вертолётёте и заметил забытый храм инков. Храм выстроен в форме правильной усечённой пирамиды с квадратными основаниями — сторона нижнего основания равна 384 и.е., сторона верхней площадки равна 3 и.е. (и.е. — инкские единицы длины). Высоту храма путешественник измерить не сумел, поэтому посадил вертолёт на верхней площадке и начал спускаться по боковой поверхности пирамиды, начиная от угла. Спускался он не напрямую — склон для этого слишком крут — а наискосок, по линии, угол наклона которой к поверхности земли равен 60° . Когда он добирался до бокового ребра, он переходил через ребро и шёл по следующей грани, под таким же углом 60° к поверхности земли.

Он закончил спуск ровно у вершины нижнего основания пирамиды, насчитав по пути 7 сторон (иными словами, его путь выглядит как ломаная, и в этой ломаной получилось 7 отрезков). Какой высоты (в и.е.) был храм?

Ответ:

Задача 8

В-1 Через три стороны правильного 30-угольника проводят прямые. Стороны выбирают так, что прямые пересекаются друг с другом, и исходный многоугольник лежит внутри полученного треугольника.

Сколько попарно неравных треугольников может получиться? Равными считаются треугольники, которые можно совместить поворотом или отражением.

Ответ:

В-2 Через три стороны правильного 32-угольника проводят прямые. Стороны выбирают так, что прямые пересекаются друг с другом, и исходный многоугольник лежит внутри полученного треугольника.

Сколько попарно неравных треугольников может получиться? Равными считаются треугольники, которые можно совместить поворотом или отражением.

Ответ:

В-3 Через три стороны правильного 36-угольника проводят прямые. Стороны выбирают так, что прямые пересекаются друг с другом, и исходный многоугольник лежит внутри полученного треугольника.

Сколько попарно неравных треугольников может получиться? Равными считаются треугольники, которые можно совместить поворотом или отражением.

Ответ:

В-4 Через три стороны правильного 40-угольника проводят прямые. Стороны выбирают так, что прямые пересекаются друг с другом, и исходный многоугольник лежит внутри полученного треугольника.

Сколько попарно неравных треугольников может получиться? Равными считаются треугольники, которые можно совместить поворотом или отражением.

Ответ:
