Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Заключительный этап 2024/25 учебного года для 7–8 класса

Задача 1

В-1 Аля и Валя испекли пирог прямоугольной формы со сторонами 20 и 15 см и решили сыграть в такую игру. Каждая из них по очереди делает не более двух параллельных разрезов и съедает один из имеющихся кусков. При этом куски перекладывать нельзя. За один ход обязательно нужно съесть кусок, но не более 1/10 пирога. Запрещено резать пирог так, чтобы получались куски меньше 1/100 пирога. Побеждает тот, кто доел пирог. Кто выигрывает при правильной игре, если начинает Аля? Какая стратегия выигрышная?

Задача 2

В-1 Назовем натуральное число счастливым, если все его цифры можно разбить на две группы, сумма цифр в каждой из которых одинакова. Примеры: 38221 $(3 + 2 + 2 + 1 = 8)$; 5678 $(5 + 8 = 6 + 7)$. Назовем число суперсчастливым, если оно счастливое и следующее за ним целое число тоже счастливое. Найдите наименьшее суперсчастливое число.

Задача 3

В-1 Найдите последнюю цифру числа

$$8^{2025^{2025}}.$$

Примечание. Порядок возведения в степень следующий: например, $4^{3^2} = 4^9 = 262144$

Задача 4

В-1 Газонная поливалка равномерно разбрызгивает вокруг себя воду в круге радиуса 2 м. На границе этого круга расположена другая такая же поливалка. А ровно посередине между двумя поливалками стоит коза.

Там, куда попадает вода из одной поливалки, равномерно растёт трава, а там, куда попадает вода из двух поливалок сразу, трава растёт равномерно и вдвое гуще. Там, куда вода из поливалок не попадает, трава не растёт вообще.

Коза может идти строго по прямой и есть траву на своём пути. В каком направлении козе нужно пойти, чтобы съесть как можно больше травы, ни разу не поворачивая, и какой длины будет её путь?

Задача 5

В-1 У Паши есть игральный кубик со стандартной расстановкой точек (при ней сумма очков на противоположных гранях равна 7), только вместо точек на кубике сидят жуки. Кубик подбросили, жуки засуетились и каждый переползает на одну из четырёх соседних граней.

Какое наибольшее число жуков может оказаться на одной грани?

.

Задача 6

В-1 В классе, состоящем из 20 учащимся, учитель раздал каждому свой сборник, содержащий ровно 100 задач. Каждый учащийся решил из этого сборника не менее n задач, а Петя — больше, чем Вася. Для какого наименьшего значения n при этом условии обязательно найдется задача, которую решило не менее половины класса?

Задача 7

В-1 Сколько есть способов сложить пальцы рук, если между двух пальцев одной руки помещается не больше двух пальцев другой?

Примечание. Например, если обозначать П — пальцы правой руки, и л — пальцы левой, то:

- Расстановки ПППППЛллллл, лПлПлПлПлП, ПППЛлППЛллл разрешены;
- Расстановки ПлллллППППП, ллППЛлПППЛлл — запрещены;
- Симметричные расстановки (например, ПППППЛллллл и лллллППППП) считаются различными.