

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Заключительный этап 2024/25 учебного года для 9 класса

Задача 1

В-1 Аля и Валя испекли пирог прямоугольной формы со сторонами 20 и 15 см и решили сыграть в такую игру. Каждая из них по очереди делает не более двух параллельных разрезов и съедает один из имеющихся кусков. При этом куски перекладывать нельзя. За один ход обязательно нужно съесть кусок, но не более $1/10$ пирога. Запрещено резать пирог так, чтобы получались куски меньше $1/100$ пирога. Побеждает тот, кто доел пирог. Кто выигрывает при правильной игре, если начинает Аля? Какая стратегия выигрышная?

Задача 2

В-1 Решите уравнение

$$x^3 - |x^2 - x - 2| = 12x - 13.$$

Задача 3

В-1 Из бумаги вырезали два разных прямоугольника — но у каждого длины сторон выражаются натуральными числами, и у каждого периметр численно равен его площади. Оба прямоугольника положили на стол, один на другой, так, что некоторые стороны одного прямоугольника оказались параллельны некоторым сторонам другого — и какая-то часть столешницы оказалась накрыта всего одним слоем бумаги.

Какая наименьшая возможная площадь этой части столешницы?

Задача 4

В-1 Биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке O . Прямая AO пересекает описанную окружность треугольника ABC в точках O и M . Найдите длину секущей OM , если $BC = 6$, $AB : AC = 3 : 1$, и $\angle BAC = 60^\circ$.

Задача 5

В-1 Найдите все значения a , при каждом из которых оси координат и гипербола $y = 1/x$ высекают на прямой $y = -18x + a$ три отрезка равной длины.

Задача 6

В-1 На каждой стороне белого кубика сидит по жуку. Кубик бросили, и жуки переполошились — каждый выбрал наугад одну из 4-х соседних граней и переполз туда.

С какой вероятностью кубик не изменит своего первоначального вида?

Задача 7

В-1 В классе, состоящем из 20 учащихся, учитель раздал каждому свой сборник, содержащий ровно 100 задач. Каждый учащийся решил из этого сборника не менее n задач, а Петя — больше, чем Вася. Для какого наименьшего значения n при этом условии обязательно найдется задача, которую решило не менее половины класса?

Задача 8

В-1 Вася нарисовал на доске замкнутую кривую $ABCD$, состоящую из четырех звеньев: AB - дуга окружности, меньшая полуокружности, BC - отрезок, CD - дуга окружности, большая полуокружности, DA - отрезок, таким образом, что любые два соседних звена перпендикулярны друг другу. Петя нарисовал кривую данного вида так, чтобы длины всех звеньев совпадали. Какие тогда будут углы у дуг AB и DC ?

Примечание: прямая перпендикулярна дуге окружности, если прямая перпендикулярна касательной к окружности.