

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Отборочный этап 2024/25 учебного года для 11 класса

Задача 1

В-1 Сколько существует целых чисел N , при которых $48000 \cdot (2.5^N + 2.5^{N+1})$ — целое число?

Ответ: 10

Решение. Разложим выражение на простые множители:

$$48000 \cdot (2.5^N + 2.5^{N+1}) = 2^4 \cdot 3 \cdot (2 \cdot 5)^3 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^N \cdot \left(1 + \frac{5}{2}\right) = 2^{6-N} \cdot 5^{3+N} \cdot 3 \cdot 7.$$

Так как числа 2, 3, 5 и 7 взаимно простые, то данное выражение будет целым, если одновременно выполняются два условия: $6 - N \geq 0$ и $3 + N \geq 0$.

Получается 10 значений.

В-2 Сколько существует целых чисел N , при которых $160000 \cdot (1.25^N + 1.25^{N+1})$ — целое число?

Ответ: 8

В-3 Сколько существует целых чисел N , при которых $32000 \cdot (2.5^N + 2.5^{N+1})$ — целое число?

Ответ: 11

В-4 Сколько существует целых чисел N , при которых $80000 \cdot (1.25^N + 1.25^{N+1})$ — целое число?

Ответ: 7

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Отборочный этап 2024/25 учебного года для 11 класса

Задача 2

В-1 Во дворе стояли два ведёрка: первое в форме цилиндра высоты 76 сантиметров и радиуса 17 см. Второе — в форме усечённого конуса, верхний круг имеет радиус 15 см, а радиус нижнего основания — 10 см. Начался дождь, в результате чего оба ведра наполнились до краев одновременно.

Найдите высоту второго ведра.

Ответ: 108

Решение. Время заполнения ведра водой равно объёму ведра, делённому на скорость набора воды ведром. Воду ведро набирает со скоростью, прямо пропорциональной πR^2 , где R — верхний диаметр ведра. Пусть за секунду один квадратный сантиметр открытой дождею поверхности сечения ведра набирает s кубических сантиметров воды.

Тогда объём первого ведра $76 \cdot \pi \cdot (17)^2$, скорость набора равна $s\pi \cdot (17)^2$, время наполнения, следовательно, $\frac{76 \cdot \pi \cdot (17)^2}{s\pi \cdot (17)^2} = \frac{76}{s}$. Теперь ищем объём второго ведра. Чтобы найти объём усечённого конуса, достраиваем его до полного, а потом вычтем из его объёма объём вершинки. Если сверху радиус равен b , снизу — a , а высота ведра (нам пока неизвестная) равна y , то тогда до полного конуса нужно добавить к высоте h , и это $h = \frac{ay}{b-a}$, а объём усечённого конуса равен $\frac{\pi}{3}((y+h)b^2 - ha^2)$. Скорость наполнения равна $s\pi b^2$, и время наполнения будет равно $\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{3b^2}((y+h)b^2 - ha^2)$

Приравниваем времена наполнения, подставляем выражение для h , упрощаем, сокращаем s и получаем, что $y = 76 \cdot \frac{3b^2}{b^2 + ba + a^2}$. С нашими параметрами ($a = 10, b = 15$) придём к ответу 108.

В-2 Во дворе стояли два ведёрка: первое в форме цилиндра высоты 76 сантиметров и радиуса 18 см. Второе — в форме усечённого конуса, верхний круг имеет радиус 12 см, а радиус нижнего основания — 18 см. Начался дождь, в результате чего оба ведра наполнились до краев одновременно.

Найдите высоту второго ведра.

Ответ: 48

В-3 Во дворе стояли два ведёрка: первое в форме параллелепипеда с квадратным дном, высотой 56 см и стороной основания 19 см. Второе — в форме усечённой пирамиды с квадратными основаниями, сторона нижнего основания равна 16 см, сторона верхнего — 32 см. Начался дождь, в результате чего оба ведра наполнились до краев одновременно.

Найдите высоту второго ведра.

Ответ: 96

В-4 Во дворе стояли два ведёрка: первое в форме параллелепипеда с квадратным дном, высотой 84 см и стороной основания 20 см. Второе — в форме усечённой пирамиды с квадратными основаниями, сторона нижнего основания равна 44 см, сторона верхнего — 22 см. Начался дождь, в результате чего оба ведра наполнились до краев одновременно.

Найдите высоту второго ведра.

Ответ: 36

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Отборочный этап 2024/25 учебного года для 11 класса

Задача 3

В-1 Найти все значения параметра a , при каждом из которых неравенство

$$25y^2 + \frac{1}{100} \geq x - axy + y - 25x^2$$

выполняется для любых пар чисел (x, y) , таких что $|x| = |y|$. В ответ записать сумму возможных значений параметра a , если их конечное число, или сумму длин интервалов возможных значений a , если значений a бесконечно много. Если значений a нет никаких — пишите 0.

Ответ: 50

Решение. Рассматриваем случаи $y = x$ и $y = -x$. В случае, когда $x = y$, имеем:

$$x^2(50 + a) - 2x + \frac{1}{100} \geq 0.$$

В случае, когда $x = -y$, имеем:

$$x^2(50 - a) + \frac{1}{100} \geq 0.$$

Рассмотрим сначала случай $x = y$. Слева график — парабола. Чтобы неравенство выполнялось для всех x , необходимо, чтобы ветви были направлены вверх, следовательно, $50 + a > 0$ и дискриминант был неположительный (покажем про упрощенный дискриминант)

$$1 - \frac{50 + a}{100} \leq 0$$

Из первого неравенства следует, что $a > -50$. А из второго $a \geq 50$. Следовательно, имеем $a \geq 50$.

Аналогично, для случая $x = -y$ имеем $a \leq 50$. Значит, $a = 50$.

В-2 Найти все значения параметра a , при каждом из которых неравенство

$$24y^2 + \frac{1}{96} \geq x - axy + y - 24x^2$$

выполняется для любых пар чисел (x, y) , таких что $|x| = |y|$. В ответ записать сумму возможных значений параметра a , если их конечное число, или сумму длин интервалов возможных значений a , если значений a бесконечно много. Если значений a нет никаких — пишите 0.

Ответ: 48

В-3 Найти все значения параметра a , при каждом из которых неравенство

$$2025y^2 + \frac{1}{8100} \geq x - axy + y - 2025x^2$$

выполняется для любых пар чисел (x, y) , таких что $|x| = |y|$. В ответ записать сумму возможных значений параметра a , если их конечное число, или сумму длин интервалов возможных значений a , если значений a бесконечно много. Если значений a нет никаких — пишите 0.

Ответ: 4050

В-4 Найти все значения параметра a , при каждом из которых неравенство

$$2024y^2 + \frac{1}{8096} \geq x - axy + y - 2024x^2$$

выполняется для любых пар чисел (x, y) , таких что $|x| = |y|$. В ответ записать сумму возможных значений параметра a , если их конечное число, или сумму длин интервалов возможных значений a , если значений a бесконечно много. Если значений a нет никаких — пишите 0.

Ответ: 4048

В-5 Найти все значения параметра a , при каждом из которых неравенство

$$506y^2 + \frac{1}{2024} \geq x - axy + y - 506x^2$$

выполняется для любых пар чисел (x, y) , таких что $|x| = |y|$. В ответ записать сумму возможных значений параметра a , если их конечное число, или сумму длин интервалов возможных значений a , если значений a бесконечно много. Если значений a нет никаких — пишите 0.

Ответ: 1012

В-6 Найти все значения параметра a , при каждом из которых неравенство

$$1012y^2 + \frac{1}{4048} \geq x - axy + y - 1012x^2$$

выполняется для любых пар чисел (x, y) , таких что $|x| = |y|$. В ответ записать сумму возможных значений параметра a , если их конечное число, или сумму длин интервалов возможных значений a , если значений a бесконечно много. Если значений a нет никаких — пишите 0.

Ответ: 2024

В-7 Найти все значения параметра a , при каждом из которых неравенство

$$12y^2 + \frac{1}{48} \geq x - axy + y - 12x^2$$

выполняется для любых пар чисел (x, y) , таких что $|x| = |y|$. В ответ записать сумму возможных значений параметра a , если их конечное число, или сумму длин интервалов возможных значений a , если значений a бесконечно много. Если значений a нет никаких — пишите 0.

Ответ: 24

В-8 Найти все значения параметра a , при каждом из которых неравенство

$$20y^2 + \frac{1}{80} \geq x - axy + y - 20x^2$$

выполняется для любых пар чисел (x, y) , таких что $|x| = |y|$. В ответ записать сумму возможных значений параметра a , если их конечное число, или сумму длин интервалов возможных значений a , если значений a бесконечно много. Если значений a нет никаких — пишите 0.

Ответ: 40

Задача 4

В-1 Найдите $\operatorname{tg}|x|$, если известно, что

$$\left(5 \sin x + 3 \cos x + \sqrt{2}\right) \left(\sqrt{11} - 3\sqrt{\sin |x|}\right) = 0.$$

В ответе укажите сумму всех возможных значений $\operatorname{tg}|x|$, округлённую до тысячных.

Ответ: 0.696

Решение. Отметим, что вторая скобка не обращается в ноль, так как $\sqrt{\sin |x|} \leq 1 < \frac{\sqrt{11}}{3}$. Таким образом, уравнение равносильно системе уравнения и неравенства

$$\begin{cases} \sin |x| \geq 0, \\ 5 \sin x + 3 \cos x + \sqrt{2} = 0. \end{cases}$$

Решаем уравнение из этой системы — получаем ещё одну систему из уравнения и неравенства:

$$\begin{cases} 5 \sin x + 3 \cos x < 0 \\ 25 \sin^2 x + 30 \sin x \cos x + 9 \cos^2 x = 2 \end{cases}$$

Решаем уравнение:

$$25 \sin^2 x + 30 \sin x \cos x + 9 \cos^2 x = 2$$

$$25 \sin^2 x + 30 \operatorname{tg} x \cos^2 x + 9 \cos^2 x = 2$$

Используем замены $\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$, $\cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$.

$$25 \left(\frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \right) + 30 \operatorname{tg} x \left(\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \right) + 9 \left(\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \right) = 2$$

Умножаем на $1 + \operatorname{tg}^2 x$, переносим всё на одну сторону — и получаем квадратное уравнение

$$23 \operatorname{tg}^2 x + 30 \operatorname{tg} x + 7 = 0.$$

Решения уравнения — это $\operatorname{tg} x = -1$ и $\operatorname{tg} x = -\frac{7}{23}$. В свою очередь, $\operatorname{tg}|x|$ сможет потенциально принимать такие значения: $1, -1, \frac{7}{23}, -\frac{7}{23}$ (потому что, обрамляя x модулем, мы либо оставляем x как есть, либо умножаем на минус один — а тангенс функция нечётная.) Проверим, подходят ли найденные x под накопившиеся условия. Перед проверкой условий отметим, что

$$\operatorname{tg}|x| = \frac{\sin |x|}{\cos |x|} = \frac{\sin |x|}{\cos x}.$$

Для выполнения условий нужно, чтобы знак $\operatorname{tg}|x|$ совпадал со знаком $\cos x$.

Когда $\cos x > 0$, из неравенства во второй системе следует, что $\operatorname{tg} x \leq -\frac{3}{5}$. Значит, $\operatorname{tg} x = -1$, но $\operatorname{tg}|x| > 0$, поэтому $\operatorname{tg}|x| = 1$.

Когда $\cos x < 0$, из неравенства во второй системе следует, что $\operatorname{tg} x \geq -\frac{3}{5}$. Значит, $\operatorname{tg} x = -\frac{7}{23}$, но $\operatorname{tg}|x| < 0$, поэтому $\operatorname{tg}|x| = -\frac{7}{23}$.

В ответ идёт $1 - \frac{7}{23}$.

В-2 Найдите $\operatorname{ctg}|x|$, если известно, что

$$\left(5 \cos x + 7 \sin x + \sqrt{2}\right) \left(\sqrt{2} - \sqrt{\sin |x|}\right) = 0.$$

В ответе укажите сумму всех возможных значений $\operatorname{ctg}|x|$, округлённую до тысячных.

Ответ: -1.043

В-3 Найдите $\operatorname{tg} 2|x|$, если известно, что

$$\left(5 \sin 2x + 3 \cos 2x + \sqrt{2}\right) \left(\sqrt{11} - 3\sqrt{\sin 2|x|}\right) = 0.$$

В ответе укажите сумму всех возможных значений $\operatorname{tg} 2|x|$, округлённую до тысячных.

Ответ: 0.696

В-4 Найдите $\operatorname{ctg} 3|x|$, если известно, что

$$\left(5 \cos 3x + 7 \sin 3x + \sqrt{2}\right) \left(\sqrt{2} - \sqrt{\sin 3|x|}\right) = 0.$$

В ответе укажите сумму всех возможных значений $\operatorname{ctg} 3|x|$, округлённую до тысячных.

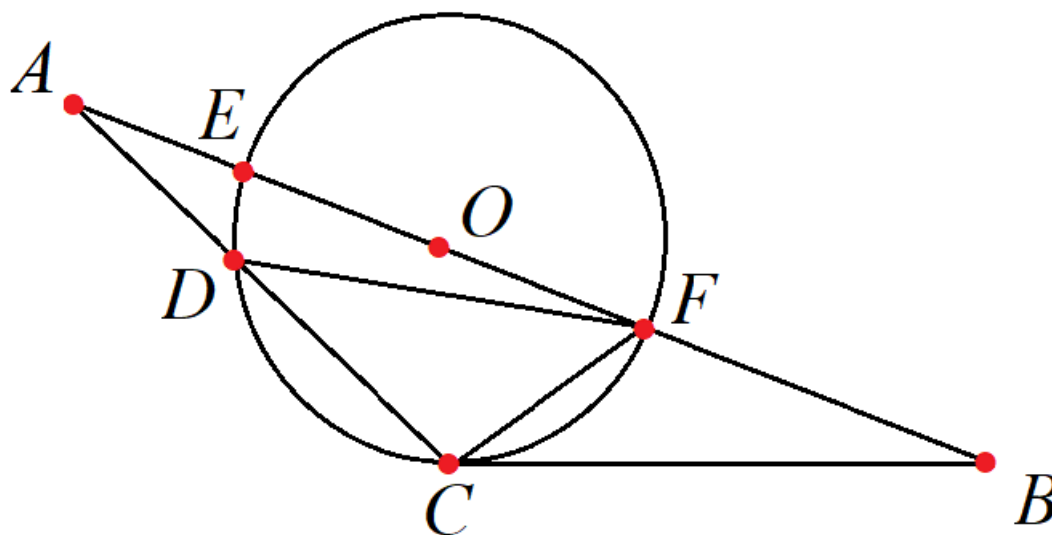
Ответ: -1.043

Задача 5

В-1 Окружность с центром O на стороне AB треугольника ABC пересекает сторону AC в точках C и D , касается стороны BC и пересекает отрезок AO в точке E , а отрезок BO в точке F . Найдите площадь треугольника ABC , если $BC = 5$, $FB = 3$ и $\angle ACB = \angle DFC + 90^\circ$. При необходимости округлите ответ до сотых.

Ответ: 14.29

Решение.



Так как окружность касается BC , то C — точка касания. По теореме о касательной и секущей $BC^2 = BE \cdot BF \Rightarrow 5^2 = (3 + 2R) \cdot 3 \Rightarrow R = \frac{8}{3}$.

Продолжим CO до диаметра. Тогда из точки пересечения этого диаметра с окружностью C_1 (на рисунке не обозначена) на хорду DC будет опираться угол, равный $\angle DFC$. При этом треугольник CDC_1 опирается на диаметр, поэтому он прямоугольный, а угол $\angle OCB$ прямой, и $\angle DCB = 90^\circ + \angle OCD$. Вместе это значит, что $\angle DCB + \angle DFC = 180^\circ$. Так как $\angle DCB + \angle DFC = 180^\circ$, а $\angle DCB - \angle DFC = 90^\circ$ (по условию), то $\angle DCB = 135^\circ$ и $\angle DFC = 45^\circ$. Отсюда соответствующий центральный угол $\angle DOC = 90^\circ$, и, так как OC перпендикулярно CB , отрезок DO параллелен CB .

Тогда

$$\frac{AO}{AB} = \frac{DO}{CB} \Rightarrow \frac{AF - \frac{8}{3}}{AF + 3} = \frac{\frac{8}{3}}{5} \Rightarrow AF = \frac{64}{7} \Rightarrow AB = \frac{85}{7}.$$

Так как

$$\sin \angle ABC = \frac{R}{R + 3} = \frac{8}{17},$$

то

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{85}{7} \cdot 5 \cdot \frac{8}{17} = \frac{100}{7}.$$

В-2 Окружность с центром O на стороне AB треугольника ABC пересекает сторону AC в точках C и D , касается стороны BC и пересекает отрезок AO в точке E , а отрезок BO в точке F . Найдите площадь треугольника ABC , если $BC = 5$, $FB = 4$ и $\angle ACB = \angle DFC + 90^\circ$. При необходимости округлите ответ до сотых.

Ответ: 3.63

В-3 Окружность с центром O на стороне AB треугольника ABC пересекает сторону AC в точках C и D , касается стороны BC и пересекает отрезок AO в точке E , а отрезок BO в точке

F. Найдите площадь треугольника ABC , если $BC = 6$, $FB = 4$ и $\angle ACB = \angle DFC + 90^\circ$. При надобности округлите ответ до сотых.

Ответ: 12.86

В-4 Окружность с центром O на стороне AB треугольника ABC пересекает сторону AC в точках C и D , касается стороны BC и пересекает отрезок AO в точке E , а отрезок BO в точке F . Найдите площадь треугольника ABC , если $BC = 3$, $FB = 2$ и $\angle ACB = \angle DFC + 90^\circ$. При надобности округлите ответ до сотых.

Ответ: 3.21

В-5 Окружность с центром O на стороне AB треугольника ABC пересекает сторону AC в точках C и D , касается стороны BC и пересекает отрезок AO в точке E , а отрезок BO в точке F . Найдите площадь треугольника ABC , если $BC = 4$, $FB = 3$ и $\angle ACB = \angle DFC + 90^\circ$. При надобности округлите ответ до сотых.

Ответ: 3.29

В-6 Окружность с центром O на стороне AB треугольника ABC пересекает сторону AC в точках C и D , касается стороны BC и пересекает отрезок AO в точке E , а отрезок BO в точке F . Найдите площадь треугольника ABC , если $BC = 7$, $FB = 5$ и $\angle ACB = \angle DFC + 90^\circ$. При надобности округлите ответ до сотых.

Ответ: 12.78

В-7 Окружность с центром O на стороне AB треугольника ABC пересекает сторону AC в точках C и D , касается стороны BC и пересекает отрезок AO в точке E , а отрезок BO в точке F . Найдите площадь треугольника ABC , если $BC = 8$, $FB = 5$ и $\angle ACB = \angle DFC + 90^\circ$. При надобности округлите ответ до сотых.

Ответ: 30.44

В-8 Окружность с центром O на стороне AB треугольника ABC пересекает сторону AC в точках C и D , касается стороны BC и пересекает отрезок AO в точке E , а отрезок BO в точке F . Найдите площадь треугольника ABC , если $BC = 8$, $FB = 6$ и $\angle ACB = \angle DFC + 90^\circ$. При надобности округлите ответ до сотых.

Ответ: 13.18

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Отборочный этап 2024/25 учебного года для 11 класса

Задача 6

В-1 Пусть функция $f(x)$ имеет конечное количество нулей и удовлетворяет условию

$$f(2x) \cdot (x - 1) = f(x) \cdot (2^{2024}x - 1), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Найдите количество нулей функции $f(x)$, лежащих в интервале $(0, \frac{1}{20242025})$

Ответ: 1999

Решение. Решим задачу в более общем случае — заменим 2024 на произвольное n . Заметим, что $x = 1$ и $x = \frac{1}{2^n - 1}$ являются нулями $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(1) \cdot (2^n - 1) &= f(2) \cdot (1 - 1) = 0, \\ f\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right) \cdot \left(\frac{1}{2^n} - 1\right) &= f\left(\frac{1}{2^n}\right) \cdot \left(2^n \cdot \frac{1}{2^n} - 1\right) = 0. \end{aligned}$$

Далее, если $a \neq \frac{1}{2^{n-1}}$ — нуль $f(x)$, то $\frac{a}{2}$ — тоже нуль $f(x)$. Действительно, для $x = \frac{a}{2}$ имеем

$$\begin{aligned} f\left(2 \cdot \frac{a}{2}\right) \cdot \left(\frac{a}{2} - 1\right) &= f\left(\frac{a}{2}\right) \cdot \left(2^n \cdot \frac{a}{2} - 1\right) \\ f(a) \cdot \left(\frac{a}{2} - 1\right) &= f\left(\frac{a}{2}\right) \cdot (2^{n-1} \cdot a - 1) \\ 0 &= f\left(\frac{a}{2}\right) \cdot (2^{n-1} \cdot a - 1), \end{aligned}$$

откуда, учитывая, что $a \neq \frac{1}{2^{n-1}}$, получаем $f(\frac{a}{2}) = 0$. Таким образом $1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2^{n-1}}$ — нули $f(x)$.

Докажем, что других нулей нет. Предположим, что a — какой-то другой нуль. Для $k = 0, \dots, n-1$ имеем $a \neq \frac{1}{2^{n-1-k}}$. Если $a < 1$, то для всех $k \in \mathbb{N}_0$ имеем $a \neq \frac{1}{2^{n-1-k}}$, то есть $\frac{a}{2^k} \neq \frac{1}{2^{n-1}}$. Значит, получаем бесконечную последовательность корней $\frac{a}{2^k}$, $k \in \mathbb{N}_0$. Противоречие. Если $a > 1$, то нетрудно видеть, что $2a, 4a, \dots, 2^k a, \dots$ — тоже нули $f(x)$, и мы опять получили противоречие с условием задачи.

Таким образом, всего имеем n нулей функции. Когда $n = 2024$, на интервале $(0, \frac{1}{20242025})$ окажутся решения $\{2^{-2023}, 2^{-2022}, \dots, 2^{-25}\}$. Так как $2^{24} = 16777216$, $2^{25} = 33554432$, то корень 2^{-25} ещё будет лежать в нужном интервале, а 2^{-24} и все последующие — уже нет. В интервал войдёт 1999 корней.

Примечание. В выданных участникам вариантах была допущена опечатка — в интервале были поставлены квадратные скобки вместо круглых. Поэтому принимались также ответы 2000, 25, 2001, 25 соответственно в вариантах 1-4.

В-2 Пусть функция $f(x)$ имеет конечное количество нулей и удовлетворяет условию

$$f(2x) \cdot (x - 1) = f(x) \cdot (2^{2024}x - 1), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Найдите количество нулей функции $f(x)$, лежащих в интервале $(\frac{1}{20242025}, 1)$

Ответ: 24

В-3 Пусть функция $f(x)$ имеет конечное количество нулей и удовлетворяет условию

$$f(2x) \cdot (x - 1) = f(x) \cdot (2^{2025}x - 1), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Найдите количество нулей функции $f(x)$, лежащих в интервале $(0, \frac{1}{20252024})$

Ответ: 2000

В-4 Пусть функция $f(x)$ имеет конечное количество нулей и удовлетворяет условию

$$f(2x) \cdot (x - 1) = f(x) \cdot (2^{2025}x - 1), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Найдите количество нулей функции $f(x)$, лежащих в интервале $(\frac{1}{20252024}, 1)$

Ответ: 24

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Отборочный этап 2024/25 учебного года для 11 класса

Задача 7

В-1 Даны два одинаковых шара радиуса 1, касающихся друг друга. К ним добавили еще три одинаковых шара, быть может другого радиуса, касающихся друг друга и изначальных двух шаров. Какого радиуса должны быть эти шары?

Ответ: 6

Решение. Так как расстояние между центрами двух касающихся шаров равно сумме их радиусов, то линии центров шаров образуют многогранник, состоящий из двух равных правильных пирамид. Пусть одна из таких пирамид $O_1C_1C_2C_3$, а другая имеет вершину O_2 симметричную O_1 относительно плоскости основания пирамиды, и тоже основание $C_1C_2C_3$. Вершины C_1, C_2, C_3 являются центрами шаров неизвестного радиуса. Обозначим этот радиус переменной x . Тогда $C_1C_2 = 2x$. Точки O_1 и O_2 — центры шаров радиуса r . Поэтому боковое ребро пирамиды равно $r + x$, а высота r . Точка O — точка касания двух изначальных шаров, или центр равностороннего треугольника $C_1C_2C_3$. Так как треугольник $C_1C_2C_3$ равносторонний, длина $OC_1 \cdot \sqrt{3} = 2x$, $OC_1 = \frac{2x}{\sqrt{3}}$. Из прямоугольного треугольника OO_1C_1 получим

$$\begin{aligned}(r + x)^2 &= r^2 + \left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right)^2, \\ r^2 + 2rx + x^2 &= r^2 + \frac{4}{3}x^2, \\ \frac{1}{3}x^2 &= 2rx, \\ x^2 &= 6rx, \\ x &= 6r.\end{aligned}$$

В-2 Даны два одинаковых шара радиуса 5, касающихся друг друга. К ним добавили еще три одинаковых шара, быть может другого радиуса, касающихся друг друга и изначальных двух шаров. Какого радиуса должны быть эти шары?

Ответ: 30

В-3 Даны два одинаковых шара радиуса 7, касающихся друг друга. К ним добавили еще три одинаковых шара, быть может другого радиуса, касающихся друг друга и изначальных двух шаров. Какого радиуса должны быть эти шары?

Ответ: 42

В-4 Даны два одинаковых шара радиуса 11, касающихся друг друга. К ним добавили еще три одинаковых шара, быть может другого радиуса, касающихся друг друга и изначальных двух шаров. Какого радиуса должны быть эти шары?

Ответ: 66

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Отборочный этап 2024/25 учебного года для 11 класса

Задача 8

В-1 11 друзей катаются на катке в форме правильного 22-угольника. Каждый из них выбрал себе одну пару параллельных сторон катка и катается между ними по прямолинейной траектории: стартовав от первой стороны, он доезжает до второй, касается заснеженного бортика и едет обратно к первой. И так далее. Через какое-то время оказалось, что суммарно на всех бортиках оказалось 2024 отпечатков рук (включая сделанные в конце, а в начале движения отпечатки не делаются), в углах бортиков отпечатков нет, а все ребята стоят у того бортика, от которого начали движение. Какое максимальное число пересечений траекторий могло получиться? (Самопересечения траекторий не учитываются.)

Ответ: 1862080

Решение. Ясно, что в одной точке не могут пересечься траектории более двух друзей – иначе число пересечений можно увеличить, немного подвинув траектории. При этом точек пересечения разных траекторий конечное число, потому что никто не ехал по диагонали (т.к. нет отпечатков в углах). Для вычисления можно считать, что траектория движения каждого из друзей состоит из параллельных линий (они будут перпендикулярны соответствующей данному другу паре бортиков). Число линий равно 2024. И если каждый j -й друг прочертил n_j линий, то $n_1 + n_2 + \dots + n_{11} = 2024$. Теперь нам нужно максимизировать число пересечений, т.е. сумму всевозможных величин $n_k \cdot n_l$ при различных k, l . Ясно (но это требует доказательства!), что максимум достигается при $n_1 = n_2 = \dots = n_{11}$. Поэтому искомый максимум равен $\frac{10 \cdot 11}{2} \left(\frac{2024}{11}\right)^2 = 1862080$.

Обоснуем, что максимум $\sum_{k < l} n_k \cdot n_l$ достигается при равенстве величин n_i . Переложим единицу с n_1 на n_2 и сравним суммы попарных произведений до и после:

$$n_1, n_2, n_3, \dots, n_m \rightarrow n_1 \cdot n_2 + n_1 \cdot n_3 + \dots + n_{m-1} \cdot n_m.$$

$$n_1 - 1, n_2 + 1, n_3, \dots, n_m \rightarrow (n_1 \cdot n_2 + n_1 \cdot n_3 + \dots + n_{m-1} \cdot n_m) - n_2 - n_3 - \dots - n_m + n_1 + n_3 + \dots + n_m - 1$$

То есть изменение суммы равно $n_1 - n_2 - 1$. Если $n_1 = n_2 + k$, (то есть n_1 было больше), то мы добиваемся прироста суммы произведений размера $k - 1$. Если, наоборот, n_2 было больше n_1 , то получается гарантированная убыль. Значит, если сумма n_i фиксированная, переложить баллы с большего n_i на меньшее n_j выгодно (если $|n_i - n_j| = 1$, то такие перекладывания ничего не добавляют). Получается, что самая выгодная конфигурация — когда нету больших и меньших значений, когда множители равны друг другу и общая сумма поделена поровну (а если поровну баллы не делятся, то n_i равны друг другу с точностью до единицы, но в нашем случае 2024 делится на 11 без остатка).

В-2 8 друзей катаются на катке в форме правильного 16-угольника. Каждый из них выбрал себе одну пару параллельных сторон катка и катается между ними по прямолинейной траектории: стартовав от первой стороны, он доезжает до второй, касается заснеженного бортика и едет обратно к первой. И так далее. Через какое-то время оказалось, что суммарно на всех бортиках оказалось 2024 отпечатков рук (включая сделанные в конце, а в начале движения отпечатки не делаются), в углах бортиков отпечатков нет, а все ребята стоят у того бортика, от которого начали движение. Какое максимальное число пересечений траекторий могло получиться? (Самопересечения траекторий не учитываются.)

Ответ: 1792248

Решение. Ясно, что в одной точке не могут пересечься траектории более двух друзей – иначе число пересечений можно увеличить, немного подвинув траектории. При этом точек пересечения разных траекторий конечное число, потому что никто не ехал по диагонали (т.к.

нет отпечатков в углах). Для вычисления можно считать, что траектория движения каждого из друзей состоит из параллельных линий (они будут перпендикулярны соответствующей данному другу паре бортиков). Число линий равно 2024. И если каждый j -й друг прочертил n_j линий, то $n_1 + n_2 + \dots + n_8 = 2024$. Теперь нам нужно максимизировать число пересечений, т.е. сумму всевозможных величин $n_k \cdot n_l$ при различных k, l .

Обоснуем, что максимум $\sum_{k < l} n_k \cdot n_l$ достигается при равенстве величин n_i . Переложим единицу с n_1 на n_2 и сравним суммы попарных произведений до и после:

$$n_1, n_2, n_3, \dots, n_m \rightarrow n_1 \cdot n_2 + n_1 \cdot n_3 + \dots + n_{m-1} \cdot n_m.$$

$$n_1 - 1, n_2 + 1, n_3, \dots, n_m \rightarrow (n_1 \cdot n_2 + n_1 \cdot n_3 + \dots + n_{m-1} \cdot n_m) - n_2 - n_3 - \dots - n_m + n_1 + n_3 + \dots + n_m - 1$$

То есть изменение суммы равно $n_1 - n_2 - 1$. Если $n_1 = n_2 + k$, (то есть n_1 было больше), то мы добиваемся прироста суммы произведений размера $k - 1$. Если, наоборот, n_2 было больше n_1 , то получается гарантированная убыль. Значит, если сумма n_i фиксированная, переложить баллы с большего n_i на меньшее n_j выгодно (если $|n_i - n_j| = 1$, то такие перекалывания ничего не добавляют). Получается, что самая выгодная конфигурация — когда нету больших и меньших значений, когда множители равны друг другу и общая сумма поделена поровну (а если поровну баллы не делятся, то n_i равны друг другу с точностью до единицы).

$2024 : 8 = 253$, а это число нечётное. Поэтому поровну поделить пробежки не получится — четверо сделают по 127 пробежек туда-сюда (1 группа), а четверо — по 126 (2 группа). Найдём их количество пересечений. Для этого удобно считать по отдельности пересечения первой группы с первой, второй группы со второй, первой группы со второй — и сложить их вместе. Получится

$$252^2 \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} + 254^2 \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} + 252 \cdot 254 \cdot 4^2 = 1792248.$$

В-3 23 друга катаются на катке в форме правильного 46-угольника. Каждый из них выбрал себе одну пару параллельных сторон катка и катается между ними по прямолинейной траектории: стартовав от первой стороны, он доезжает до второй, касается заснеженного бортика и едет обратно к первой. И так далее. Через какое-то время оказалось, что суммарно на всех бортиках оказалось 2024 отпечатков рук (включая сделанные в конце, а в начале движения отпечатки не делаются), в углах бортиков отпечатков нет, а все ребята стоят у того бортика, от которого начали движение. Какое максимальное число пересечений траекторий могло получиться? (Самопересечения траекторий не учитываются.)

Ответ: 1959232

В-4 88 друзей катаются на катке в форме правильного 176-угольника. Каждый из них выбрал себе одну пару параллельных сторон катка и катается между ними по прямолинейной траектории: стартовав от первой стороны, он доезжает до второй, касается заснеженного бортика и едет обратно к первой. И так далее. Через какое-то время оказалось, что суммарно на всех бортиках оказалось 2024 отпечатков рук (включая сделанные в конце, а в начале движения отпечатки не делаются), в углах бортиков отпечатков нет, а все ребята стоят у того бортика, от которого начали движение. Какое максимальное число пересечений траекторий могло получиться? (Самопересечения траекторий не учитываются.)

Ответ: 2024968