

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике
Отборочный этап 2024/25 учебного года для 5–6 классов

Задача 1

В-1 Вася выписал на асфальте 1000 натуральных чисел и обнаружил, что их произведение получилось равным 1000. Найдите наибольшее возможное значение суммы этих чисел.

Ответ: 1999

Решение. Для 1000. Пусть есть два числа a, b , отличные от 1. Тогда справедливо неравенство

$$a \cdot b + 1 > a + b.$$

Это значит, что заменой пары a, b на пару 1, ab мы добьёмся большей суммы. Прделаем так со всеми парами чисел, отличными от 1. Получим, что наибольшая сумма будет, когда одно число 1000, а остальные равны 1.

В-2 Вася выписал на асфальте 10000 натуральных чисел и обнаружил, что их произведение получилось равным 10000. Найдите наибольшее возможное значение суммы этих чисел.

Ответ: 19999

В-3 Вася выписал на асфальте 100000 натуральных чисел и обнаружил, что их произведение получилось равным 100000. Найдите наибольшее возможное значение суммы этих чисел.

Ответ: 199999

В-4 Вася выписал на асфальте 1000000 натуральных чисел и обнаружил, что их произведение получилось равным 1000000. Найдите наибольшее возможное значение суммы этих чисел.

Ответ: 1999999

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Отборочный этап 2024/25 учебного года для 5–6 классов

Задача 2

В-1 Вычеркните из числа

$$\underbrace{20242024\dots2024}_{400 \text{ цифр}}$$

100 цифр так, чтобы полученное число было максимально. В ответ запишите сумму цифр полученного числа. Число может начинаться с 0.

Ответ: 668

Решение. (Для варианта 1). Очевидно, что в первых 33 числах 2024 нужно вычеркнуть цифры 0 и 2, чтобы полученное число было максимальным. У следующего числа 2024 вычеркиваем 0. Осталось число следующего вида:

$$\underbrace{4\dots4}_{33} \underbrace{224}_{264 \text{ цифры}} \underbrace{2024\dots2024}_{264 \text{ цифры}}$$

Сумма оставшихся цифр равна

$$4 \cdot 33 + (2 + 2 + 4) \cdot 67 = 668.$$

В-2 Вычеркните из числа

$$\underbrace{20242024\dots2024}_{400 \text{ цифр}}$$

100 цифр так, чтобы полученное число было минимально. В ответ запишите сумму цифр полученного числа. Число может начинаться с 0.

Ответ: 534

В-3 Вычеркните из числа

$$\underbrace{20252025\dots2025}_{400 \text{ цифр}}$$

100 цифр так, чтобы полученное число было максимально. В ответ запишите сумму цифр полученного числа. Число может начинаться с 0.

Ответ: 768

В-4 Вычеркните из числа

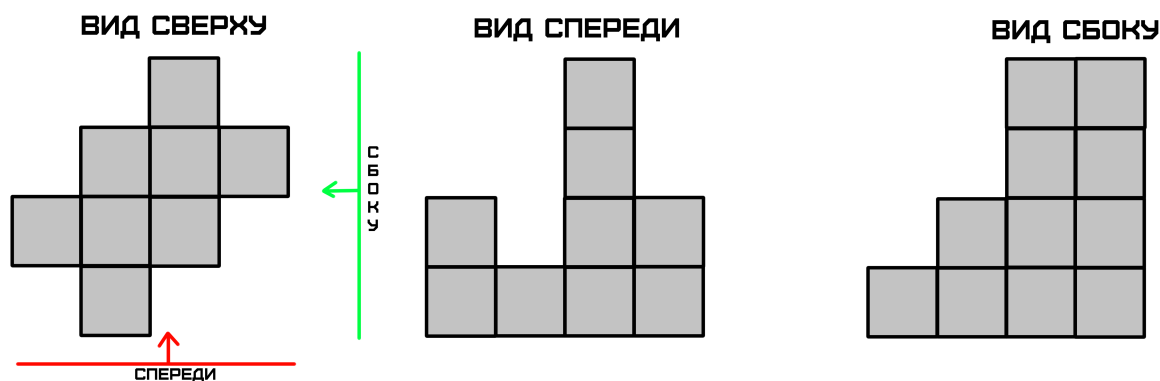
$$\underbrace{20252025\dots2025}_{400 \text{ цифр}}$$

100 цифр так, чтобы полученное число было минимально. В ответ запишите сумму цифр полученного числа. Число может начинаться с 0.

Ответ: 601

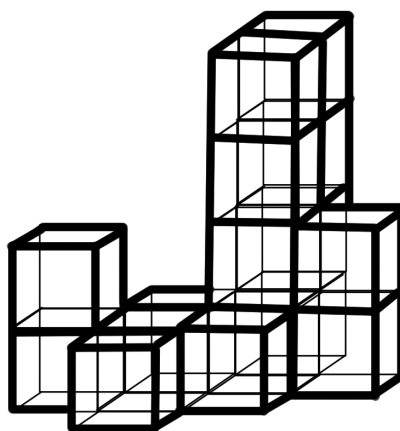
Задача 3

В-1 На полу выложили фигуру из кубиков (в которой кубики стыкуются гранями). Вид сверху, вид спереди и вид сбоку на получившуюся фигуру показаны на рисунке. После постройки фигуру склеили и окунули в банку с краской, а затем разделили на отдельные кубики. Какое наименьшее число незакрашенных граней могло получиться?



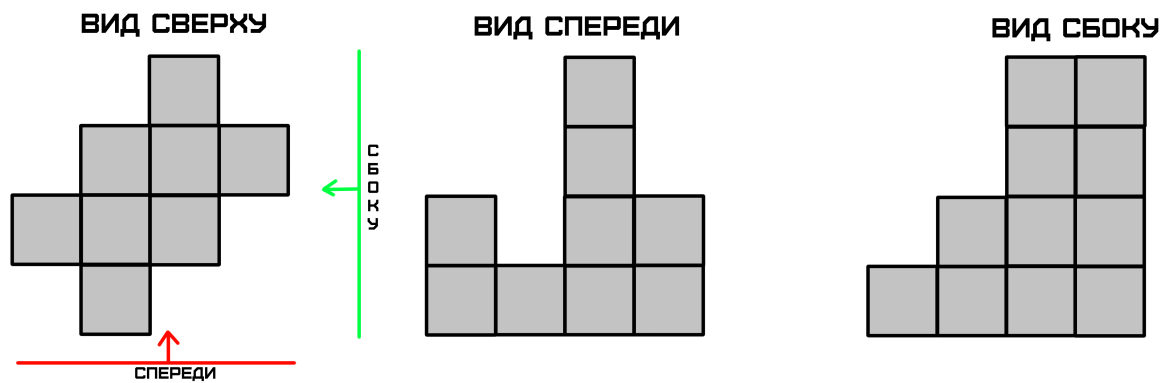
Ответ: 40

Решение. Получаем для случая минимума следующую картинку:



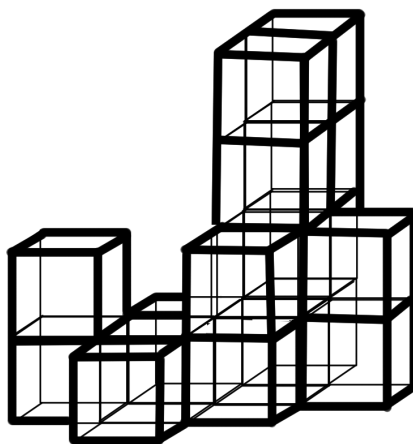
Ответ равен 40

В-2 На полу выложили фигуру из кубиков (в которой кубики стыкуются гранями). Вид сверху, вид спереди и вид сбоку на получившуюся фигуру показаны на рисунке. После постройки фигуру склеили и окунули в банку с краской, а затем разделили на отдельные кубики. Какое наибольшее число незакрашенных граней могло получиться?



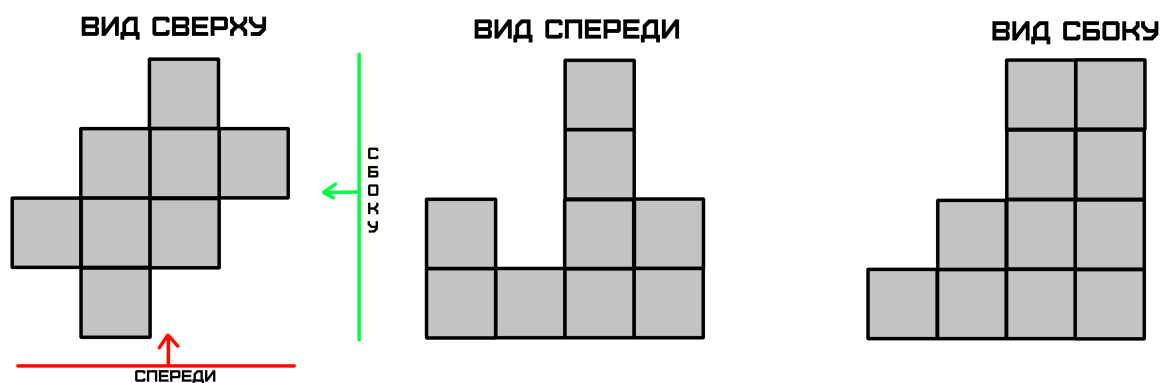
Ответ: 44

Решение. Получаем для случая максимума следующую картинку:



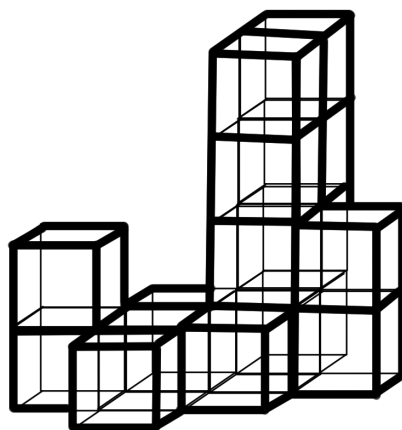
Ответ равен 44.

В-3 Здание состоит из одинаковых комнат кубической формы. Его схема (вид сверху, спереди и сбоку) представлены на картинке. Найти минимальное число межкомнатных перегородок (перегородкой считается стена, разделяющая две комнаты и перекрытие между верхней и нижней комнатой (пол для одной, потолок для другой)).



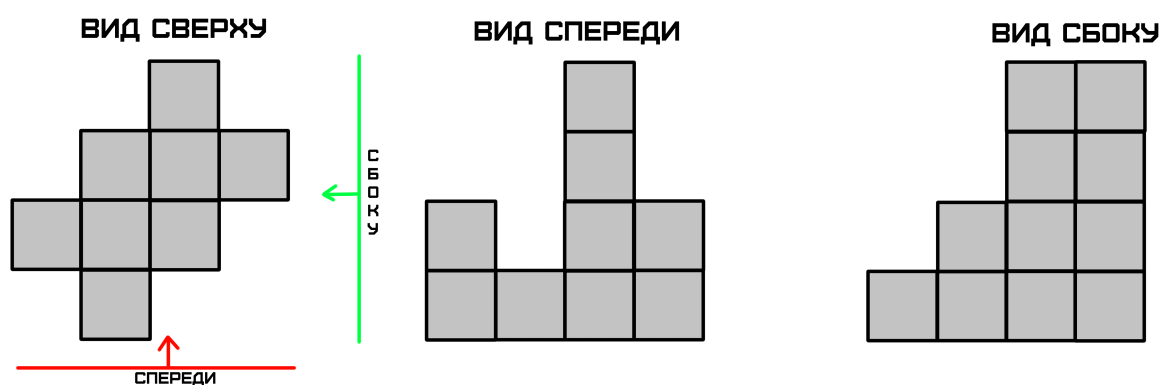
Ответ: 20

Решение. Получаем для случая минимума следующую картинку:



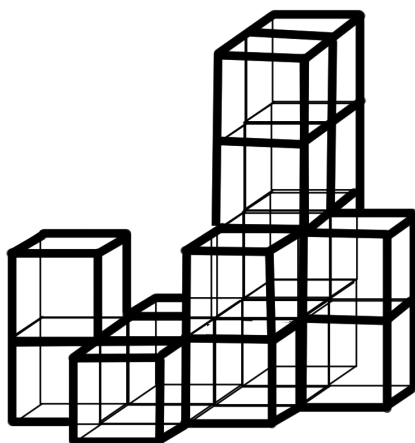
Ответ равен 20

В-4 Здание состоит из одинаковых комнат кубической формы. Его схема (вид сверху, спереди и сбоку) представлены на картинке. Найти максимальное число межкомнатных перегородок (перегородкой считается стена, разделяющая две комнаты и перекрытие между верхней и нижней комнатой (пол для одной, потолок для другой)).



Ответ: 22

Решение. Получаем для случая максимума следующую картинку:



Ответ равен 22.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Отборочный этап 2024/25 учебного года для 5–6 классов

Задача 4

В-1 Вокруг фонтана Дружбы народов из одной точки в противоположные стороны вышли мама и папа. Одновременно с ними из этой же точки выехала дочка на самокате и без изменения направления катается на нем по кругу вокруг фонтана до тех пор, пока мама с папой не встретятся. Сколько целых кругов проедет девочка, если ее скорость 2 круга в минуту, скорость мамы 2 круга в час и скорость папы 4 круга в час?

Ответ: 20

Решение. Совместная скорость родителей $v = 2 + 4 = 6$ кр/ч. Таким образом, время, которое прошло до момента встречи — это $\frac{1}{6}$ часа. Расстояние, которое проедет девочка на самокате со скоростью 2 круга/мин = 120 кругов/час будет

$$\frac{1}{6} \cdot 120 = 20 \text{ кругов.}$$

В-2 Вокруг фонтана Дружбы народов из одной точки в противоположные стороны вышли мама и папа. Одновременно с ними из этой же точки выехала дочка на самокате и без изменения направления катается на нем по кругу вокруг фонтана до тех пор, пока мама с папой не встретятся. Сколько целых кругов проедет девочка, если ее скорость 1 круг в минуту, скорость мамы 3 круга в час и скорость папы 2 круга в час?

Ответ: 12

В-3 Вокруг фонтана Дружбы народов из одной точки в противоположные стороны вышли мама и папа. Одновременно с ними из этой же точки выехала дочка на самокате и без изменения направления катается на нем по кругу вокруг фонтана до тех пор, пока мама с папой не встретятся. Сколько целых кругов проедет девочка, если ее скорость 0.5 круга в минуту, скорость мамы 1 круг в час и скорость папы 2 круга в час?

Ответ: 10

В-4 Вокруг фонтана Дружбы народов из одной точки в противоположные стороны вышли мама и папа. Одновременно с ними из этой же точки выехала дочка на самокате и без изменения направления катается на нем по кругу вокруг фонтана до тех пор, пока мама с папой не встретятся. Сколько целых кругов проедет девочка, если ее скорость 1 круг в минуту, скорость мамы 0,5 круга в час и скорость папы 1 круг в час?

Ответ: 40

Задача 5

В-1 В квартире составителя задач этой олимпиады есть цифровые часы, показывающие время в формате ЧЧ:ММ:СС на трёх экранчиках (один под часы, один под минуты и один под секунды). Часы идут от 00 до 23. Теперь представим, что эти экранчики при сборке перепутали местами — и показания идут так: СС:ЧЧ:ММ. Сколько секунд в сутки такие часы покажут время правильно?

Ответ: 24

Решение. Когда экран стоит на своём месте — его показания всегда правильные. Если же экранчики стоят не на своём месте — показания получатся правильные в том случае, когда на экранчиках одинаковые числа (например, 15:15). Во всех вариантах экран с часами стоит не на своём месте, он показывает числа от 00 до 23 (24 варианта), поэтому показания минут и/или секунд должны соответствовать. То есть, если один экран стоит на своём месте, мы получаем $24 \cdot 60$ вариантов, а если ни один не стоит на своём месте — вариантов будет только 24.

В-2 В квартире составителя задач этой олимпиады есть цифровые часы, показывающие время в формате ЧЧ:ММ:СС на трёх экранчиках (один под часы, один под минуты и один под секунды). Часы идут от 00 до 23. Теперь представим, что эти экранчики при сборке перепутали местами — и показания идут так: СС:ММ:ЧЧ. Сколько секунд в сутки такие часы покажут время правильно?

Ответ: 1440

В-3 В квартире составителя задач этой олимпиады есть цифровые часы, показывающие время в формате ЧЧ:ММ:СС на трёх экранчиках (один под часы, один под минуты и один под секунды). Часы идут от 00 до 23. Теперь представим, что эти экранчики при сборке перепутали местами — и показания идут так: ММ:ЧЧ:СС. Сколько секунд в сутки такие часы покажут время правильно?

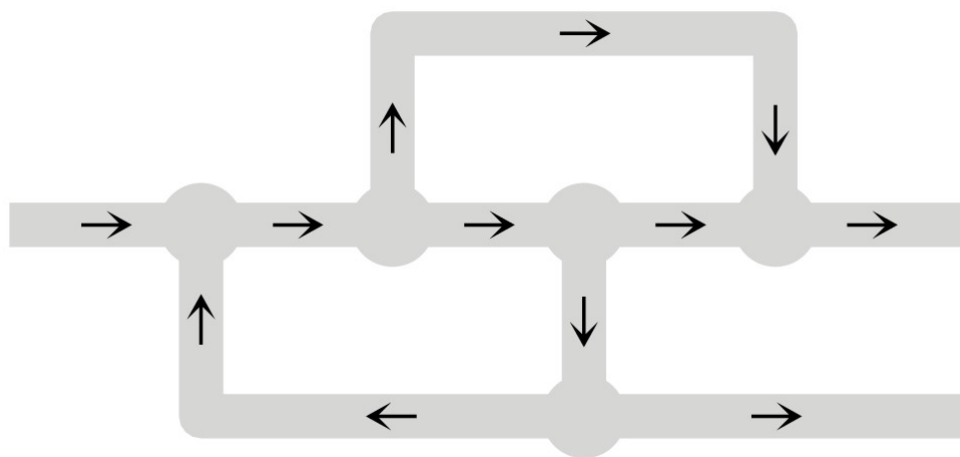
Ответ: 1440

В-4 В квартире составителя задач этой олимпиады есть цифровые часы, показывающие время в формате ЧЧ:ММ:СС на трёх экранчиках (один под часы, один под минуты и один под секунды). Часы идут от 00 до 23. Теперь представим, что эти экранчики при сборке перепутали местами — и показания идут так: ММ:СС:ЧЧ. Сколько секунд в сутки такие часы покажут время правильно?

Ответ: 24

Задача 6

В-1

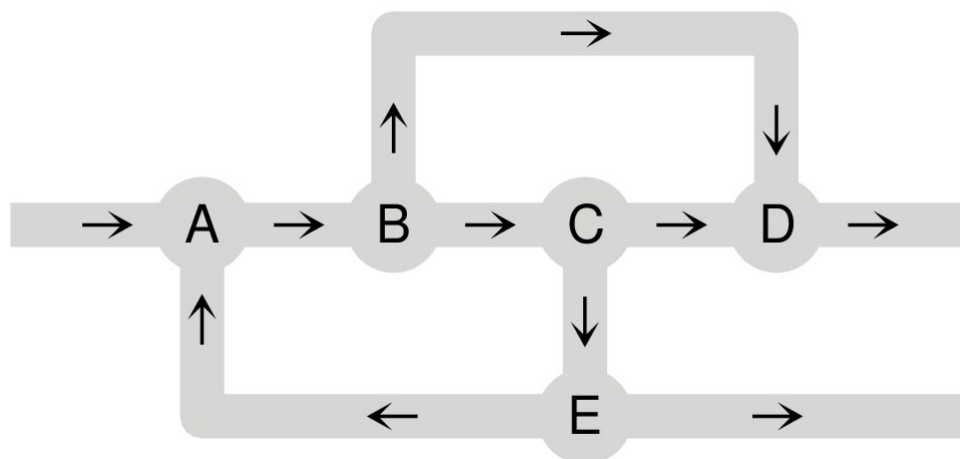


Через переплетение труб и клапанов течёт вода. Система односторонняя, вода течёт в направлении стрелок. Вода со всех входящих в клапан труб складывается вместе, а потом делится поровну между всеми исходящими из клапана трубами.

Какая часть входящего потока выйдет через верхнюю трубу? Ответ при необходимости округлите до сотых.

Ответ: 0.86

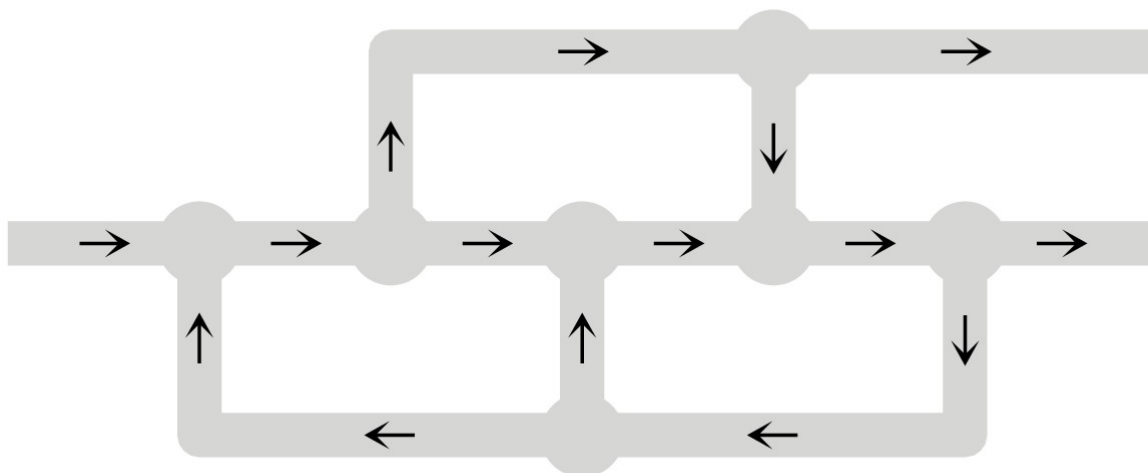
Решение.



Пойдём по трубам последовательно. В клапане A к потоку извне (пусть он равен 1) прибавляется сколько-то воды от обратной петли. Сколько по ней поступает — нам пока неизвестно, поэтому обозначим добавленное количество неизвестной x . Тогда: в точке B поток разделится на $\frac{1+x}{2}$ и $\frac{1+x}{2}$. В точке C приходящее разделится на $\frac{1+x}{4}$ и $\frac{1+x}{4}$. В точке D сойдутся вместе $\frac{1+x}{2}$ и $\frac{1+x}{4}$. В точке E поток разделяется на $\frac{1+x}{8}$ и $\frac{1+x}{8}$, и здесь оказывается, что $x = \frac{1+x}{8}$. Откуда мы однозначно находим $x = \frac{1}{7}$. А исходящий поток поделится в отношении $\frac{1+x}{2} + \frac{1+x}{4}$ к $\frac{1+x}{8}$, то есть

6 к 1, если упростить дроби.

В-2

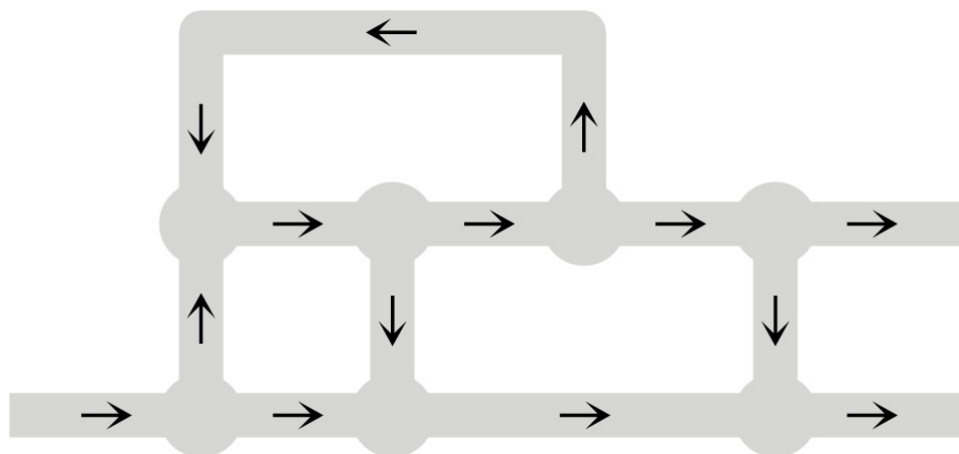


Через переплетение труб и клапанов течёт вода. Система односторонняя, вода течёт в направлении стрелок. Вода со всех входящих в клапан труб складывается вместе, а потом делится поровну между всеми исходящими из клапана трубами.

Какая часть входящего потока выйдет через верхнюю трубу? Ответ при необходимости округлите до сотых.

Ответ: 0.33

В-3

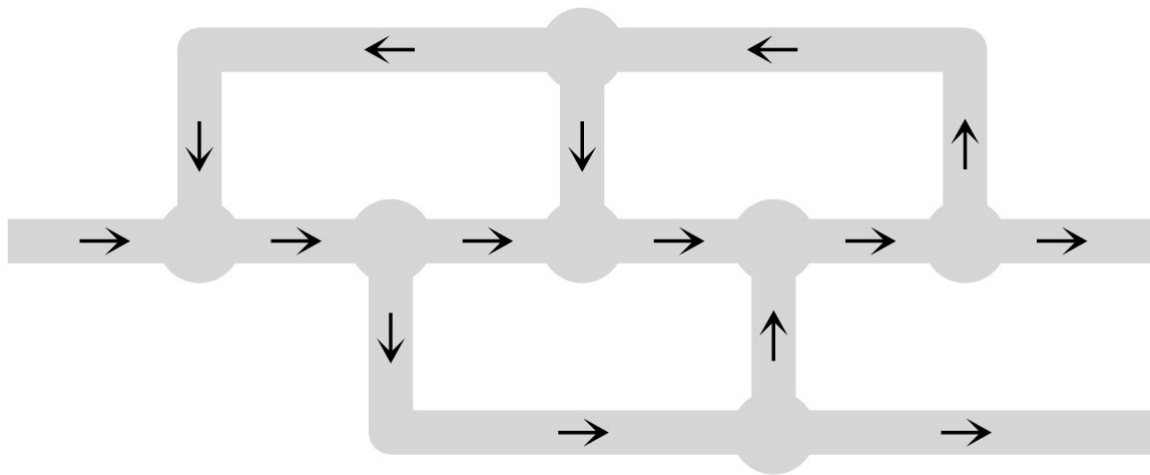


Через переплетение труб и клапанов течёт вода. Система односторонняя, вода течёт в направлении стрелок. Вода со всех входящих в клапан труб складывается вместе, а потом делится поровну между всеми исходящими из клапана трубами.

Какая часть входящего потока выйдет через верхнюю трубу? Ответ при необходимости округлите до сотых.

Ответ: 0.08

В-4



Через переплетение труб и клапанов течёт вода. Система односторонняя, вода течёт в направлении стрелок. Вода со всех входящих в клапан труб складывается вместе, а потом делится поровну между всеми исходящими из клапана трубами.

Какая часть входящего потока выйдет через верхнюю трубу? Ответ при необходимости округлите до сотых.

Ответ: 0.67