

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Отборочный этап 2024/25 учебного года для 7–8 класса

Задача 1

В-1 Найдите произведение всех целых n , при которых $n^2 + 2n - 120$ — простое число.

Ответ: -143

Решение. Так как

$$n^2 + 2n - 120 = (n + 12)(n - 10),$$

то один из сомножителей равен 1 или -1 .

Рассмотрим 4 случая.

1) $n + 12 = 1$. Значит, $n = -11$, $n - 10 = -21$, выражение составное.

2) $n + 12 = -1$. Значит, $n = -13$, $n - 10 = -23$, выражение простое.

3) $n - 10 = 1$. Значит, $n = 11$, $n + 12 = 23$, выражение простое.

4) $n - 10 = -1$. Значит, $n = 9$, $n + 12 = 21$, выражение составное.

Подходят $n = -13, 11$, произведение которых равно -143 .

В-2 Найдите сумму всех целых n , при которых $n^2 + 2n - 80$ — простое число.

Ответ: -2

В-3 Найдите сумму всех целых n , при которых $n^2 - 2n - 120$ — простое число.

Ответ: 2

В-4 Найдите произведение всех целых n , при которых $n^2 - 2n - 80$ — простое число.

Ответ: -99

Задача 2

В-1 Вокруг фонтана Дружбы народов из одной точки в противоположные стороны вышли мама и папа. Одновременно с ними из этой же точки выехала дочка на самокате и без изменения направления катается на нем по кругу вокруг фонтана до тех пор, пока мама с папой не встретятся. Сколько целых кругов проедет девочка, если ее скорость 2 круга в минуту, скорость мамы 2 круга в час и скорость папы 4 круга в час?

Ответ: 20

Решение. Совместная скорость родителей $v = 2 + 4 = 6$ кр/ч. Таким образом, время, которое прошло до момента встречи — это $\frac{1}{6}$ часа. Расстояние, которое проедет девочка на самокате со скоростью 2 круга/мин = 120 кругов/час будет

$$\frac{1}{6} \cdot 120 = 20 \text{ кругов.}$$

В-2 Вокруг фонтана Дружбы народов из одной точки в противоположные стороны вышли мама и папа. Одновременно с ними из этой же точки выехала дочка на самокате и без изменения направления катается на нем по кругу вокруг фонтана до тех пор, пока мама с папой не встретятся. Сколько целых кругов проедет девочка, если ее скорость 1 круг в минуту, скорость мамы 3 круга в час и скорость папы 2 круга в час?

Ответ: 12

В-3 Вокруг фонтана Дружбы народов из одной точки в противоположные стороны вышли мама и папа. Одновременно с ними из этой же точки выехала дочка на самокате и без изменения направления катается на нем по кругу вокруг фонтана до тех пор, пока мама с папой не встретятся. Сколько целых кругов проедет девочка, если ее скорость 0.5 круга в минуту, скорость мамы 1 круг в час и скорость папы 2 круга в час?

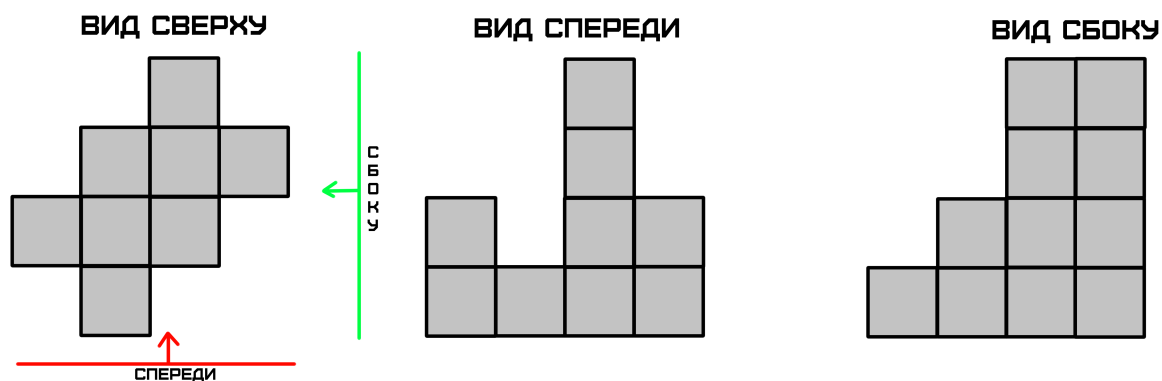
Ответ: 10

В-4 Вокруг фонтана Дружбы народов из одной точки в противоположные стороны вышли мама и папа. Одновременно с ними из этой же точки выехала дочка на самокате и без изменения направления катается на нем по кругу вокруг фонтана до тех пор, пока мама с папой не встретятся. Сколько целых кругов проедет девочка, если ее скорость 1 круг в минуту, скорость мамы 0,5 круга в час и скорость папы 1 круг в час?

Ответ: 40

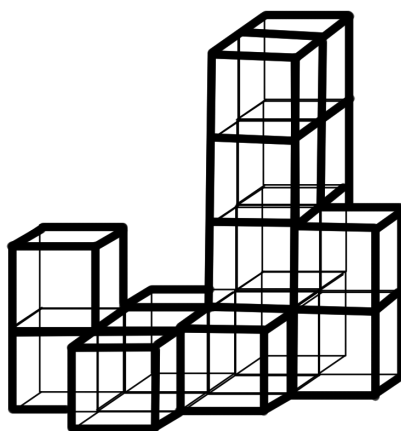
Задача 3

В-1 На полу выложили фигуру из кубиков (в которой кубики стыкуются гранями). Вид сверху, вид спереди и вид сбоку на получившуюся фигуру показаны на рисунке. После постройки фигуру склеили и окунули в банку с краской, а затем разделили на отдельные кубики. Какое наименьшее число незакрашенных граней могло получиться?



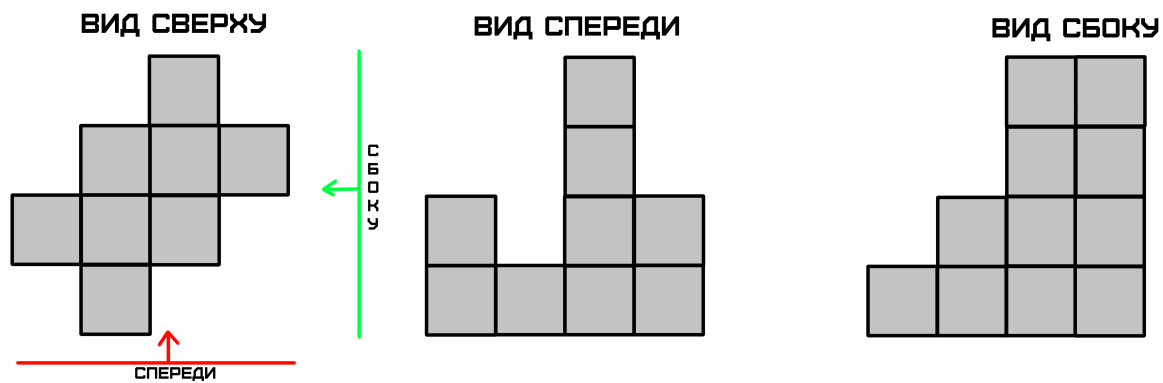
Ответ: 40

Решение. Получаем для случая минимума следующую картинку:



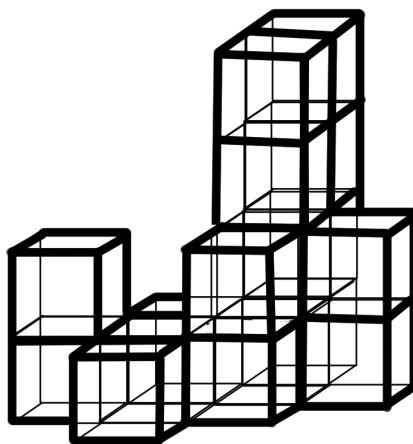
Ответ равен 40

В-2 На полу выложили фигуру из кубиков (в которой кубики стыкуются гранями). Вид сверху, вид спереди и вид сбоку на получившуюся фигуру показаны на рисунке. После постройки фигуру склеили и окунули в банку с краской, а затем разделили на отдельные кубики. Какое наибольшее число незакрашенных граней могло получиться?



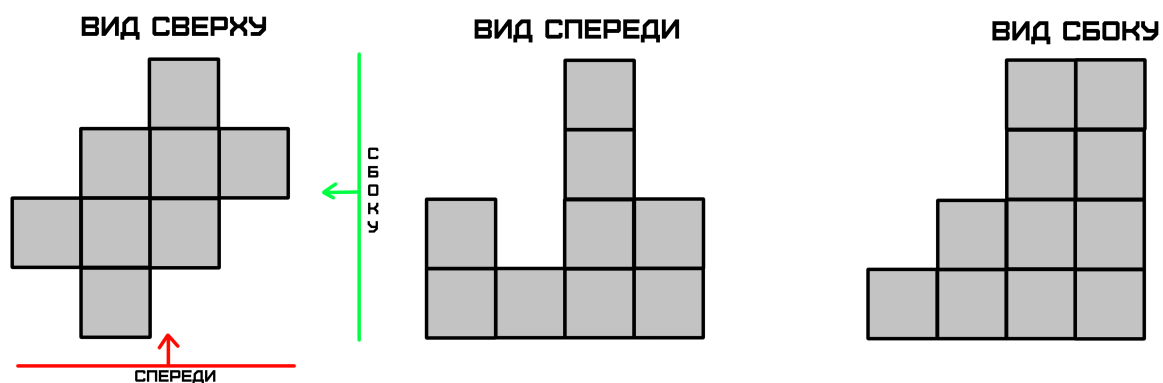
Ответ: 44

Решение. Получаем для случая максимума следующую картинку:



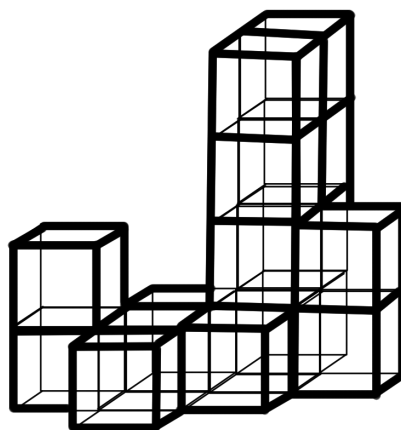
Ответ равен 44.

В-3 Здание состоит из одинаковых комнат кубической формы. Его схема (вид сверху, спереди и сбоку) представлены на картинке. Найти минимальное число межкомнатных перегородок (перегородкой считается стена, разделяющая две комнаты и перекрытие между верхней и нижней комнатой (пол для одной, потолок для другой)).



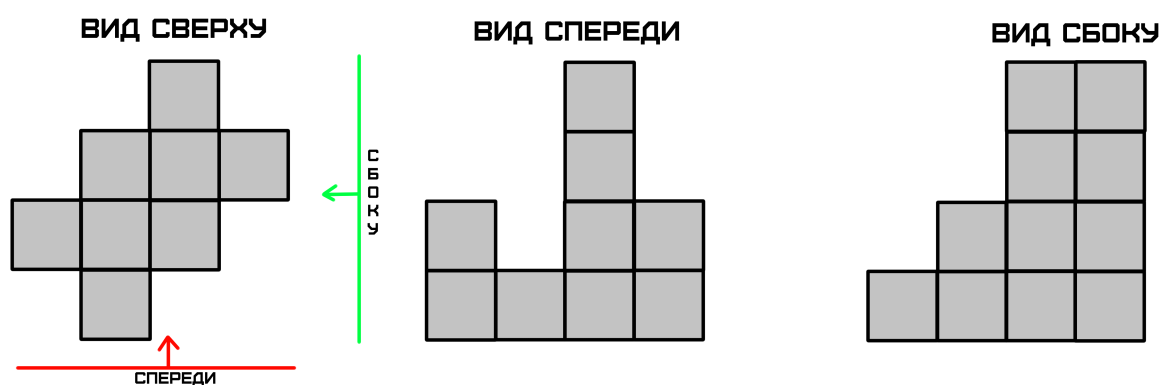
Ответ: 20

Решение. Получаем для случая минимума следующую картинку:



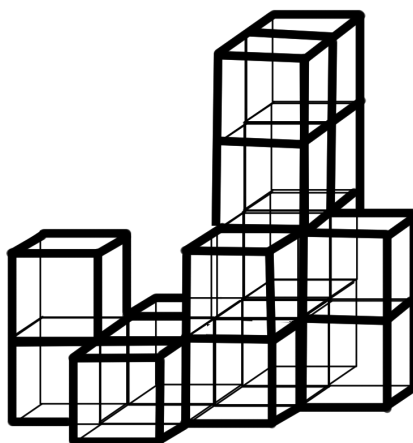
Ответ равен 20

В-4 Здание состоит из одинаковых комнат кубической формы. Его схема (вид сверху, спереди и сбоку) представлены на картинке. Найти максимальное число межкомнатных перегородок (перегородкой считается стена, разделяющая две комнаты и перекрытие между верхней и нижней комнатой (пол для одной, потолок для другой)).



Ответ: 22

Решение. Получаем для случая максимума следующую картинку:



Ответ равен 22.

Задача 4

В-1 В квартире составителя задач этой олимпиады есть цифровые часы, показывающие время в формате ЧЧ:ММ:СС на трёх экранчиках (один под часы, один под минуты и один под секунды). Часы идут от 00 до 23. Теперь представим, что эти экранчики при сборке перепутали местами — и показания идут так: СС:ЧЧ:ММ. Сколько секунд в сутки такие часы покажут время правильно?

Ответ: 24

Решение. Когда экран стоит на своём месте — его показания всегда правильные. Если же экранчики стоят не на своём месте — показания получатся правильные в том случае, когда на экранчиках одинаковые числа (например, 15:15). Во всех вариантах экран с часами стоит не на своём месте, он показывает числа от 00 до 23 (24 варианта), поэтому показания минут и/или секунд должны соответствовать. То есть, если один экран стоит на своём месте, мы получаем $24 \cdot 60$ вариантов, а если ни один не стоит на своём месте — вариантов будет только 24.

В-2 В квартире составителя задач этой олимпиады есть цифровые часы, показывающие время в формате ЧЧ:ММ:СС на трёх экранчиках (один под часы, один под минуты и один под секунды). Часы идут от 00 до 23. Теперь представим, что эти экранчики при сборке перепутали местами — и показания идут так: СС:ММ:ЧЧ. Сколько секунд в сутки такие часы покажут время правильно?

Ответ: 1440

В-3 В квартире составителя задач этой олимпиады есть цифровые часы, показывающие время в формате ЧЧ:ММ:СС на трёх экранчиках (один под часы, один под минуты и один под секунды). Часы идут от 00 до 23. Теперь представим, что эти экранчики при сборке перепутали местами — и показания идут так: ММ:ЧЧ:СС. Сколько секунд в сутки такие часы покажут время правильно?

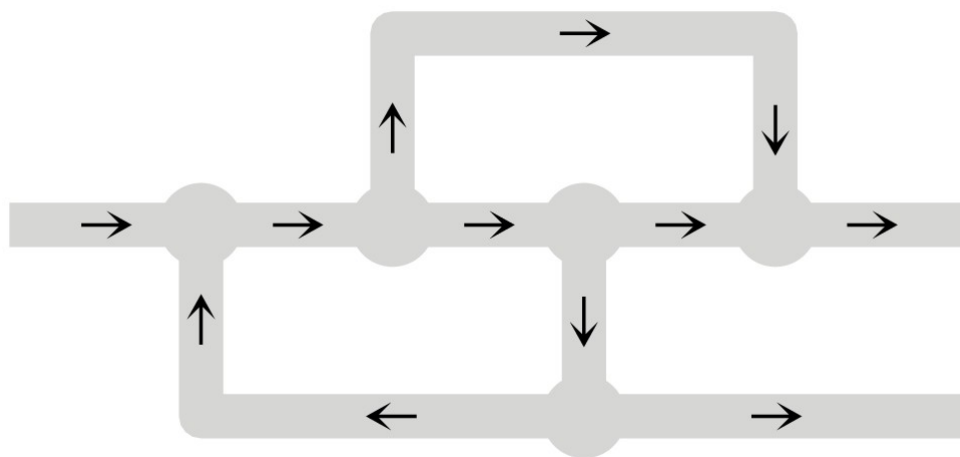
Ответ: 1440

В-4 В квартире составителя задач этой олимпиады есть цифровые часы, показывающие время в формате ЧЧ:ММ:СС на трёх экранчиках (один под часы, один под минуты и один под секунды). Часы идут от 00 до 23. Теперь представим, что эти экранчики при сборке перепутали местами — и показания идут так: ММ:СС:ЧЧ. Сколько секунд в сутки такие часы покажут время правильно?

Ответ: 24

Задача 5

В-1

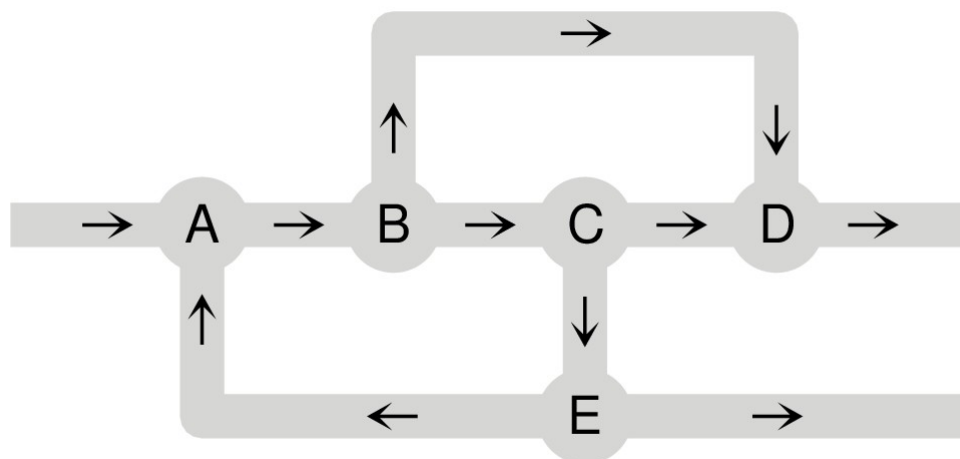


Через переплетение труб и клапанов течёт вода. Система односторонняя, вода течёт в направлении стрелок. Вода со всех входящих в клапан труб складывается вместе, а потом делится поровну между всеми исходящими из клапана трубами.

Какая часть входящего потока выйдет через верхнюю трубу? Ответ при необходимости округлите до сотых.

Ответ: 0.86

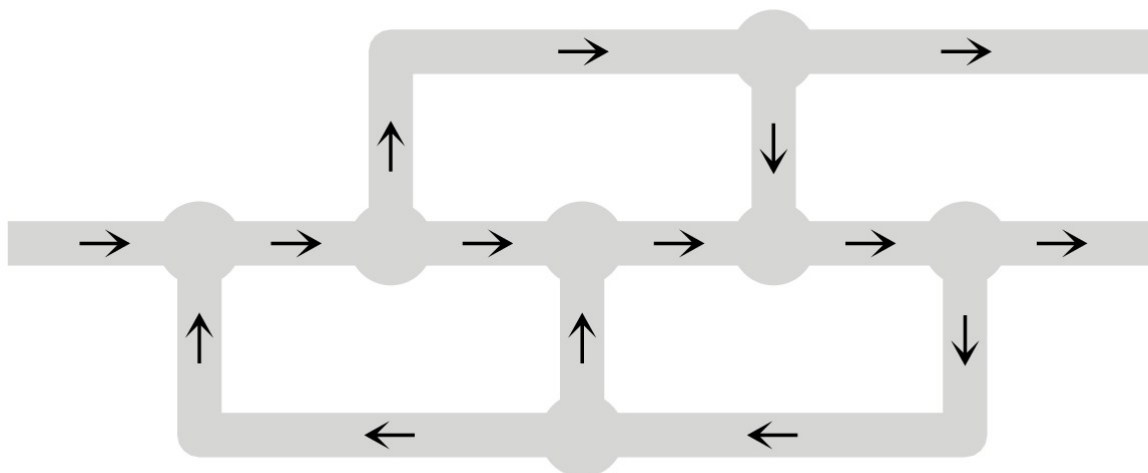
Решение.



Пойдём по трубам последовательно. В клапане A к потоку извне (пусть он равен 1) прибавляется сколько-то воды от обратной петли. Сколько по ней поступает — нам пока неизвестно, поэтому обозначим добавленное количество неизвестной x . Тогда: в точке B поток разделится на $\frac{1+x}{2}$ и $\frac{1+x}{2}$. В точке C приходящее разделится на $\frac{1+x}{4}$ и $\frac{1+x}{4}$. В точке D сойдутся вместе $\frac{1+x}{2}$ и $\frac{1+x}{4}$. В точке E поток разделяется на $\frac{1+x}{8}$ и $\frac{1+x}{8}$, и здесь оказывается, что $x = \frac{1+x}{8}$. Откуда мы однозначно находим $x = \frac{1}{7}$. А исходящий поток поделится в отношении $\frac{1+x}{2} + \frac{1+x}{4}$ к $\frac{1+x}{8}$, то есть

6 к 1, если упростить дроби.

В-2

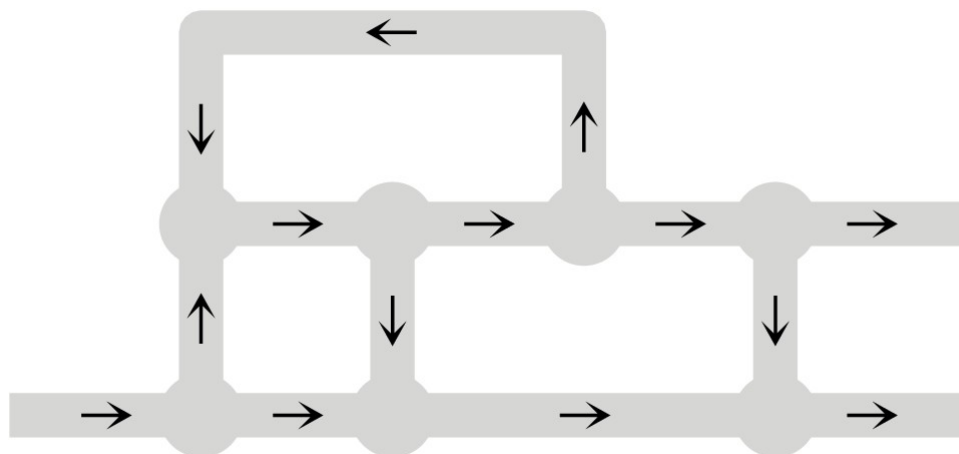


Через переплетение труб и клапанов течёт вода. Система односторонняя, вода течёт в направлении стрелок. Вода со всех входящих в клапан труб складывается вместе, а потом делится поровну между всеми исходящими из клапана трубами.

Какая часть входящего потока выйдет через верхнюю трубу? Ответ при необходимости округлите до сотых.

Ответ: 0.33

В-3

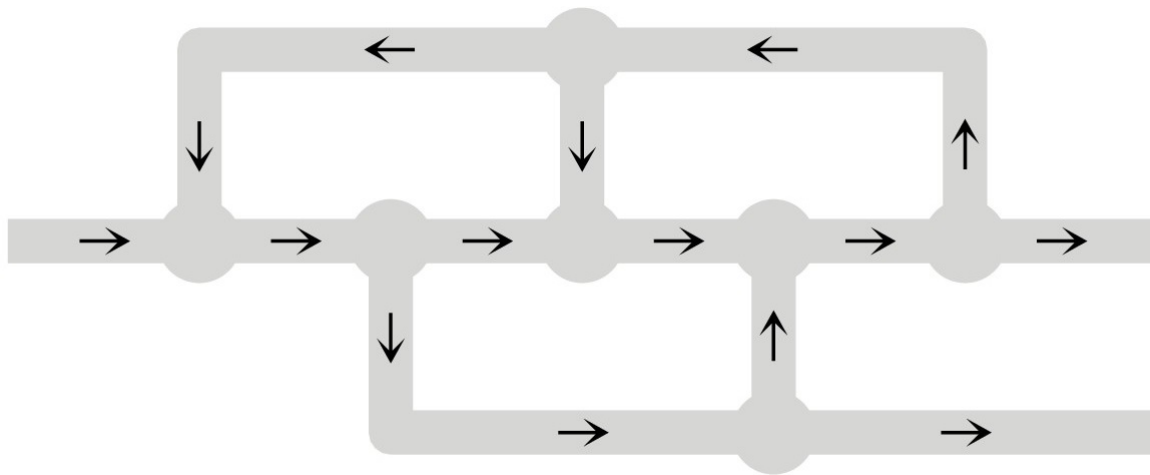


Через переплетение труб и клапанов течёт вода. Система односторонняя, вода течёт в направлении стрелок. Вода со всех входящих в клапан труб складывается вместе, а потом делится поровну между всеми исходящими из клапана трубами.

Какая часть входящего потока выйдет через верхнюю трубу? Ответ при необходимости округлите до сотых.

Ответ: 0.08

В-4



Через переплетение труб и клапанов течёт вода. Система односторонняя, вода течёт в направлении стрелок. Вода со всех входящих в клапан труб складывается вместе, а потом делится поровну между всеми исходящими из клапана трубами.

Какая часть входящего потока выйдет через верхнюю трубу? Ответ при необходимости округлите до сотых.

Ответ: 0.67

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Отборочный этап 2024/25 учебного года для 7–8 класса

Задача 6

В-1 Найдите все натуральные $n < 26$, при которых любое $x > 0$, удовлетворяющее

$$\{8x\} = \{25x\},$$

удовлетворяет также и

$$\{26x\} = \{nx\},$$

где $\{\cdot\}$ — дробная часть числа.

Дробной частью a называют следующее число: $\{a\} = a - k$, где k — наибольшее целое число, которое меньше или равно a . Например, $\{\frac{4}{3}\} = \frac{1}{3}$, $\{0.5\} = 0.5$, $\{5\} = 0$.

Ответ: 9

Решение. Заметим, что т.к. дробные части чисел $25x$ и $8x$ совпадают, их разность $25x - 8x$ будет натуральной. Значит, $25x - 8x = 17x$ — натуральное число. Тогда если $n = 9$, то $26x - 9x = 17x$ — натуральное число. Поэтому $\{26x\} = \{nx\}$. Докажем, что других n нет. Нам известно, что $17x$ — натуральное число. Тогда или само x натуральное, или x имеет вид $\frac{p}{17}$, где p натуральное. Когда x натуральное, то все уравнения в условии принимают вид $0 = 0$, то есть при целом x годится любая n . Но x может принимать и не целые значения — пусть $x = \frac{p}{17}$, где p не делится на 17. Тогда $26x - nx = \frac{(26 - n)p}{17}$ — целое число. Тогда $26 - n$ делится на 17, то есть $n = 9$. Под все возможные x подходит только $n = 9$.

Примечание. В выданных участникам вариантах была допущена опечатка — в варианте 2 и 4 стояло $n < 26$ вместо $n < 23$. Поэтому в варианте 2 также принимался ответ 12, 25, а в варианте 4 — ответ 10, 23.

В-2 Найдите все натуральные $n < 23$, при которых любое $x > 0$, удовлетворяющее

$$\{10x\} = \{23x\},$$

удовлетворяет также и

$$\{25x\} = \{nx\},$$

где $\{\cdot\}$ — дробная часть числа.

Дробной частью a называют следующее число: $\{a\} = a - k$, где k — наибольшее целое число, которое меньше или равно a . Например, $\{\frac{4}{3}\} = \frac{1}{3}$, $\{0.5\} = 0.5$, $\{5\} = 0$.

Ответ: 12

В-3 Найдите все натуральные $n < 26$, при которых любое $x > 0$, удовлетворяющее

$$\{9x\} = \{28x\},$$

удовлетворяет также и

$$\{30x\} = \{nx\},$$

где $\{\cdot\}$ — дробная часть числа.

Дробной частью a называют следующее число: $\{a\} = a - k$, где k — наибольшее целое число, которое меньше или равно a . Например, $\{\frac{4}{3}\} = \frac{1}{3}$, $\{0.5\} = 0.5$, $\{5\} = 0$.

Ответ: 11

В-4 Найдите все натуральные $n < 23$, при которых любое $x > 0$, удовлетворяющее

$$\{11x\} = \{24x\},$$

удовлетворяет также и

$$\{23x\} = \{nx\},$$

где $\{\cdot\}$ — дробная часть числа.

Дробной частью a называют следующее число: $\{a\} = a - k$, где k — наибольшее целое число, которое меньше или равно a . Например, $\{\frac{4}{3}\} = \frac{1}{3}$, $\{0.5\} = 0.5$, $\{5\} = 0$.

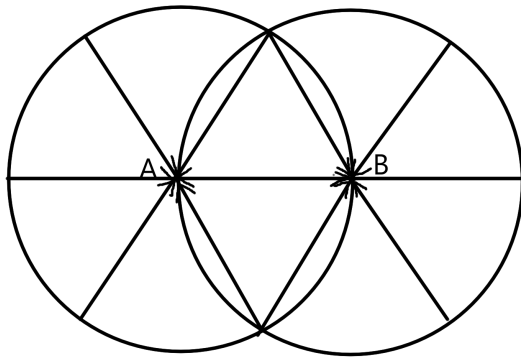
Ответ: 10

Задача 7

В-1 50 детей играют в снежки. Каждый набрал в руку по снаряду. По команде ребята одновременно кидают снежок в ближайшего к нему ребенка (в одного из ближайших, если несколько детей находится на одинаковом расстоянии от него). Найти наименьшее число детей, в которые попал хотя бы один снежок.

Ответ: 10

Решение. (Для варианта 1, 50 человек.) Заметим, что в каждого ребенка может попасть не более 6 снежков. Так как иначе у каждого метателя найдётся другой ребенок, который окажется к нему ближе. Ровно 6 снежков ребенок может получить только в том случае, если в него стреляли дети, находящиеся в вершинах правильного шестиугольника, а подбитый находился в центре этого шестиугольника. Назовем того, кто в центре A . Он сам попал в одного из этих 6 стрелявших. Назовем второго подбитого B . Нетрудно показать, что если в A попало 6 снежков, то в B не более четырех. Поскольку было выпущено 50 снежков, а в каждого мальчика попало не более 6 снежков, то подбито не менее 9-ти детей. Если подбито ровно 9 детей, то не меньше 5-ти из них подбито 6-ю снежками. Но тогда должно быть еще 5 подбитых детей. Что противоречит противоречию, что всего 9 подбитых детей. Следовательно, снежками попали не менее чем в 10 детей. Ситуация, в которой оказывается ровно 10 детей приведена на картинке, где дети разбиваются на 5 групп по 10 человек и в каждой группе оказывается ровно двое детей, в которых попали снежком.



В-2 60 детей играют в снежки. Каждый набрал в руку по снаряду. По команде ребята одновременно кидают снежок в ближайшего к нему ребенка (в одного из ближайших, если несколько детей находится на одинаковом расстоянии от него). Найти наименьшее число детей, в которые попал хотя бы один снежок.

Ответ: 12

В-3 70 детей играют в снежки. Каждый набрал в руку по снаряду. По команде ребята одновременно кидают снежок в ближайшего к нему ребенка (в одного из ближайших, если несколько детей находится на одинаковом расстоянии от него). Найти наименьшее число детей, в которые попал хотя бы один снежок.

Ответ: 14

В-4 40 детей играют в снежки. Каждый набрал в руку по снаряду. По команде ребята одновременно кидают снежок в ближайшего к нему ребенка (в одного из ближайших, если несколько детей находится на одинаковом расстоянии от него). Найти наименьшее число детей, в которые попал хотя бы один снежок.

Ответ: 8
