

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике
Отборочный этап 2024/25 учебного года для 9 класса

Задача 1

В-1 Найдите множество значений функции

$$y = \sqrt{x^2 - 3x + 2} - x.$$

В ответе укажите число целых y из области значений, не превосходящих 100.

Ответ: 103

Решение. Искомое множество значений совпадает с множеством значений y , для которых имеет решение система

$$\begin{cases} x + y \geq 0, \\ (x + y)^2 = x^2 - 3x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y \geq 0, \\ (2y + 3)x = 2 - y^2. \end{cases}$$

Поэтому задача сводится к решению неравенства

$$\frac{2 - y^2}{2y + 3} + y \geq 0,$$

которое равносильно

$$\frac{(y + 1)(y + 2)}{2y + 3} \geq 0,$$

то есть область значений $y \in [-2, -\frac{3}{2}) \cup [-1, +\infty)$.

В-2 Найдите множество значений функции

$$y = x - \sqrt{x^2 + x - 2}.$$

В ответе укажите число целых y из области значений, не меньших, чем -100 .

Ответ: 101

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике
Отборочный этап 2024/25 учебного года для 9 класса

В-3 Найдите множество значений функции

$$y = \sqrt{4x^2 + 10x + 6} - 2x.$$

В ответе укажите число целых y из области значений, больших 1, но не превосходящих 100.

Ответ: 99

В-4 Найдите множество значений функции

$$y = \sqrt{4x^2 - 10x + 4} - 2x.$$

В ответе укажите число целых y из области значений, не превосходящих 100.

Ответ: 104

Задача 2

В-1 Сумма восьми натуральных чисел равна 1001. Какое наибольшее значение может принимать их наибольший общий делитель?

Ответ: 91

Решение. Искомый НОД является делителем каждого из восьми чисел, а значит, и их суммы $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$. При этом он не равен $11 \cdot 13$ (и, тем более, $7 \cdot 11 \cdot 13$), так как $8 \cdot 11 \cdot 13 > 1001$. Значение НОД $= 7 \cdot 13$ возможно. Например, семь чисел равны $7 \cdot 13 = 91$, а восьмое равно $4 \cdot 7 \cdot 13 = 364$.

В-2 Сумма шести натуральных чисел равна 455. Какое наибольшее значение может принимать их наибольший общий делитель?

Ответ: 65

В-3 Сумма восьми натуральных чисел равна 561. Какое наибольшее значение может принимать их наибольший общий делитель?

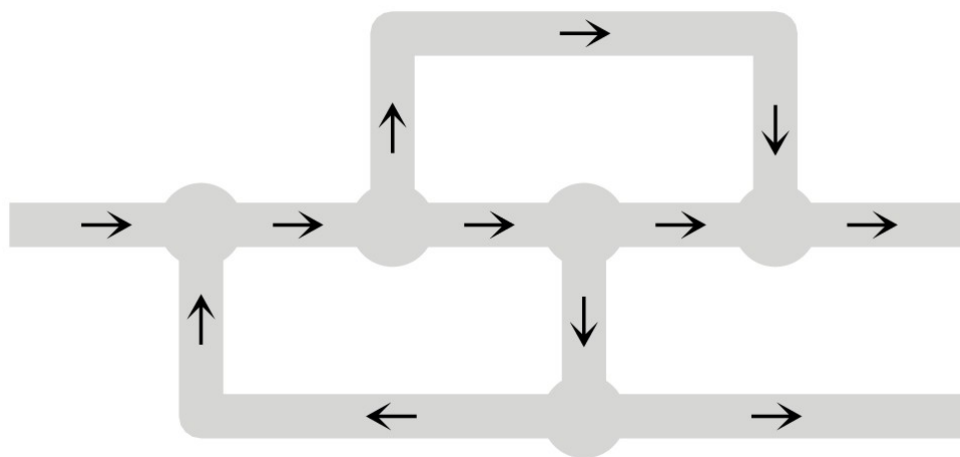
Ответ: 51

В-4 Сумма семи натуральных чисел равна 715. Какое наибольшее значение может принимать их наибольший общий делитель?

Ответ: 65

Задача 3

В-1

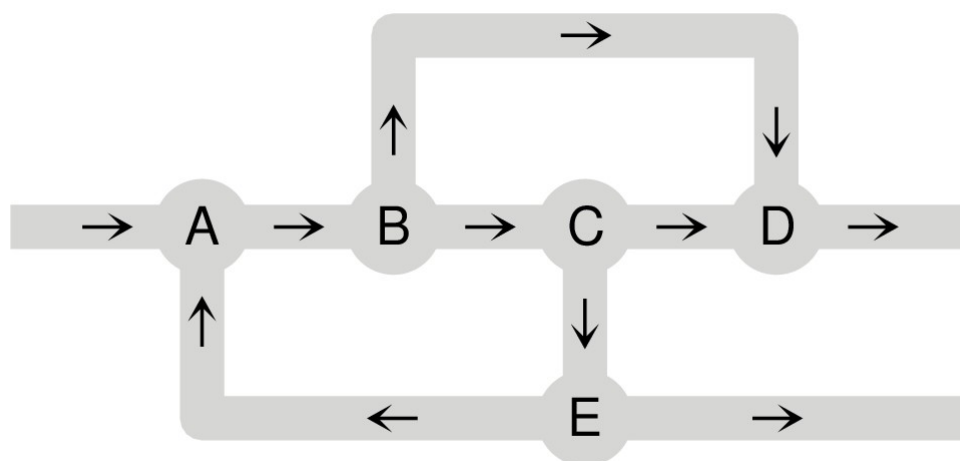


Через переплетение труб и клапанов течёт вода. Система односторонняя, вода течёт в направлении стрелок. Вода со всех входящих в клапан труб складывается вместе, а потом делится поровну между всеми исходящими из клапана трубами.

Какая часть входящего потока выйдет через верхнюю трубу? Ответ при необходимости округлите до сотых.

Ответ: 0.86

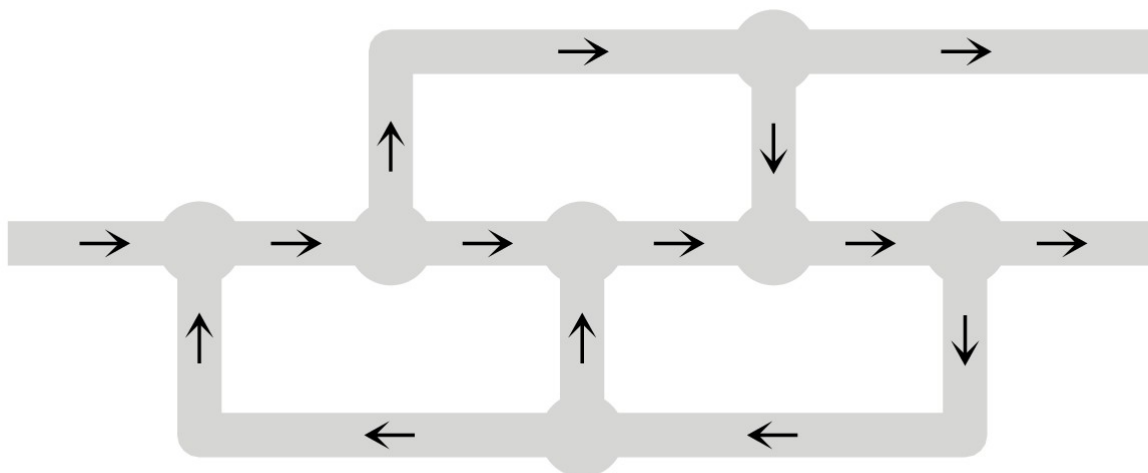
Решение.



Пойдём по трубам последовательно. В клапане A к потоку извне (пусть он равен 1) прибавляется сколько-то воды от обратной петли. Сколько по ней поступает — нам пока неизвестно, поэтому обозначим добавленное количество неизвестной x . Тогда: в точке B поток разделится на $\frac{1+x}{2}$ и $\frac{1+x}{2}$. В точке C приходящее разделится на $\frac{1+x}{4}$ и $\frac{1+x}{4}$. В точке D сойдутся вместе $\frac{1+x}{2}$ и $\frac{1+x}{4}$. В точке E поток разделяется на $\frac{1+x}{8}$ и $\frac{1+x}{8}$, и здесь оказывается, что $x = \frac{1+x}{8}$. Откуда мы однозначно находим $x = \frac{1}{7}$. А исходящий поток поделится в отношении $\frac{1+x}{2} + \frac{1+x}{4}$ к $\frac{1+x}{8}$, то есть

6 к 1, если упростить дроби.

В-2

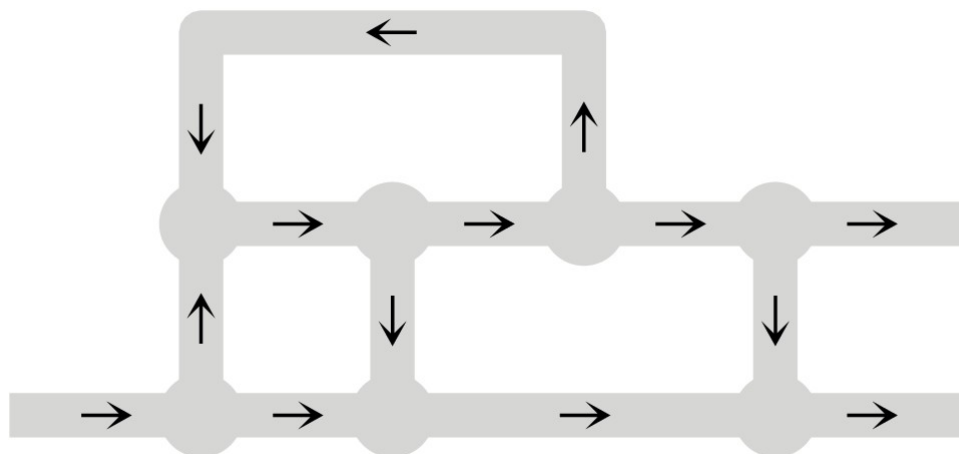


Через переплетение труб и клапанов течёт вода. Система односторонняя, вода течёт в направлении стрелок. Вода со всех входящих в клапан труб складывается вместе, а потом делится поровну между всеми исходящими из клапана трубами.

Какая часть входящего потока выйдет через верхнюю трубу? Ответ при необходимости округлите до сотых.

Ответ: 0.33

В-3

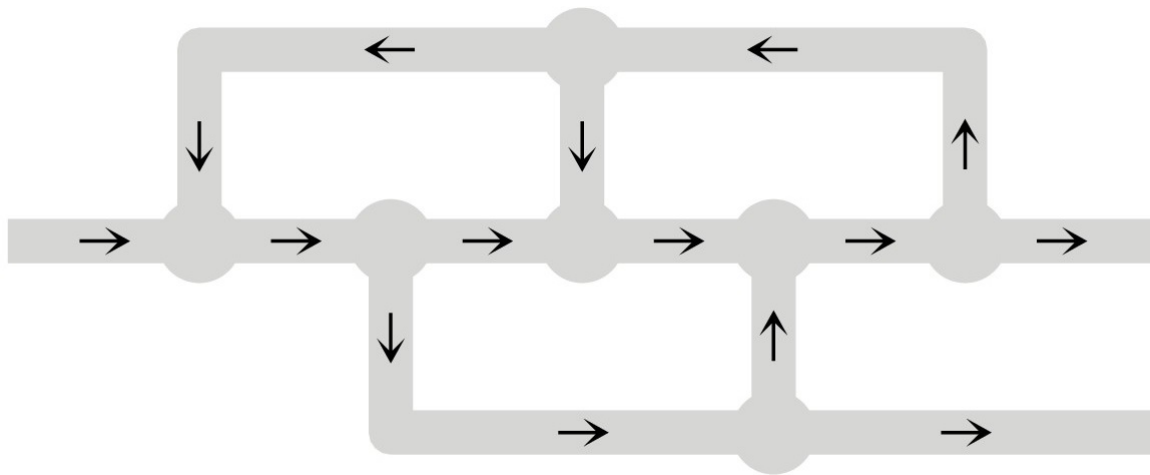


Через переплетение труб и клапанов течёт вода. Система односторонняя, вода течёт в направлении стрелок. Вода со всех входящих в клапан труб складывается вместе, а потом делится поровну между всеми исходящими из клапана трубами.

Какая часть входящего потока выйдет через верхнюю трубу? Ответ при необходимости округлите до сотых.

Ответ: 0.08

В-4



Через переплетение труб и клапанов течёт вода. Система односторонняя, вода течёт в направлении стрелок. Вода со всех входящих в клапан труб складывается вместе, а потом делится поровну между всеми исходящими из клапана трубами.

Какая часть входящего потока выйдет через верхнюю трубу? Ответ при необходимости округлите до сотых.

Ответ: 0.67

Задача 4

В-1 Найдите десятый член последовательности $\{a_n\}$, если для всех $n \geq 1$ выполняется соотношение $a_{n+1} = 3a_n - 2$, и при этом $a_1 = 7$.

Ответ: 118099

Решение. Введём $b_n = a_n + c$, где c — константа. Тогда

$$b_{n+1} = a_{n+1} + c = 3a_n - 2 + c = 3b_n - 2 - 2c.$$

Если взять $c = -1$, то получим $b_{n+1} = 3b_n$, то есть b_n — геометрическая прогрессия со знаменателем $q = 3$.

Так как $b_1 = 7 - 1 = 6$, то получаем $b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = 6 \cdot 3^{n-1}$.

Тогда $a_n = b_n - c = 6 \cdot 3^{n-1} + 1 = 2 \cdot 3^n + 1$.

Значит, $a_{10} = 2 \cdot 3^{10} + 1 = 118099$.

В-2 Найдите тринадцатый член последовательности $\{a_n\}$, если для всех $n \geq 1$ выполняется соотношение $a_{n+1} = 2a_n + 3$, и при этом $a_1 = 14$.

Ответ: 69629

В-3 Найдите десятый член последовательности $\{a_n\}$, если для всех $n \geq 1$ выполняется соотношение $a_{n+1} = 3a_n - 2$, и при этом $a_1 = 6$.

Ответ: 98416

В-4 Найдите тринадцатый член последовательности $\{a_n\}$, если для всех $n \geq 1$ выполняется соотношение $a_{n+1} = 2a_n + 3$, и при этом $a_1 = 15$.

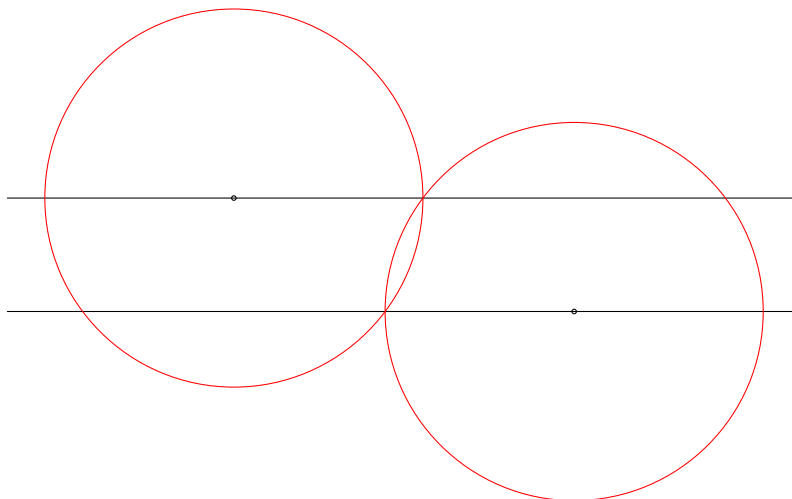
Ответ: 73725

Задача 5

В-1 Улица имеет форму полосы длины 200 м и ширины 5 м. Вдоль каждого края улицы стоят фонари, каждый из которых освещает круг радиуса 13 м вокруг себя. Какое минимальное число фонарей надо расставить, чтобы улица была полностью освещена?

Ответ: 9

Решение.



На своей стороне фонарь с радиусом 13 м освещает по 13 м обочины в обе стороны. Значит, на противоположной стороне он может осветить $\sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ метров обочины в обе стороны. Так или иначе, обе обочины нужно осветить полностью — один фонарь может осветить 24 + 26 метров обочин, обе обочины дают в общей сложности 400 м, так что понадобится минимум $\frac{400}{50} = 8$ фонарей. Если у нас есть всего 8 фонарей, то общую длину обочин они освещают «впритык» — если вдруг освещение на обочинах наложится друг на друга, то общей длины уже не хватит на всю улицу. Это принуждает нас к оптимальной расстановке фонарей в «шахматном порядке» — то есть если на этой стороне есть фонарь, то через 25 метров на противоположной стороне будет стоять следующий фонарь. Отдельно взятую обочину поочерёдно освещают то фонари с этой стороны, то с противоположной — без пробелов и наложений. Будь следующий фонарь на другом расстоянии, или у другой обочины — получилось бы наложение света, или же пробел, которой бы пришлось заполнять дополнительным фонарём. Поэтому расстановка шахматная.

Само дорожное полотно с такой расстановкой тоже будет освещено полностью — с небольшими наложениями.

С такой расстановкой получится осветить по 200 метров обочины с каждой стороны всего восьмью фонарями — но эти 200 метров освещённых обочин будут сдвинуты на метр относительно друг друга. Около торца прямоугольной улицы получится небольшой неосвещённый «треугольник». Для того, чтобы осветить всю улицу, понадобится 9-й фонарь.

В-2 Улица имеет форму полосы длины 320 м и ширины 8 м. Вдоль каждого края улицы стоят фонари, каждый из которых освещает круг радиуса 17 м вокруг себя. Какое минимальное число фонарей надо расставить, чтобы улица была полностью освещена?

Ответ: 11

В-3 Улица имеет форму полосы длины 294 м и ширины 7 м. Вдоль каждого края улицы стоят фонари, каждый из которых освещает круг радиуса 25 м вокруг себя. Какое минимальное число фонарей надо расставить, чтобы улица была полностью освещена?

Ответ: 7

В-4 Улица имеет форму полосы длины 972 м и ширины 9 м. Вдоль каждого края улицы стоят фонари, каждый из которых освещает круг радиуса 41 м вокруг себя. Какое минимальное число фонарей надо расставить, чтобы улица была полностью освещена?

Ответ: 13

Задача 6

В-1 Сколько корней имеет уравнение

$$[-(x-2)^2] = 2x - 4,$$

где через $[t]$ обозначена целая часть числа t (т.е. наибольшее целое число, не превосходящее t)?

Ответ: 4

Решение. Точки $x = 0, 0.5, 1.5, 2$ — это абсциссы всех точек пересечения графиков левой $f(x)$ и правой $g(x)$ частей, так как

$$f(0) = -4 = g(0), \quad f(0.5) = -3 = g(0.5), \quad f(1.5) = -1 = g(0.5), \quad f(2) = 0 = g(2),$$

$$f(1) = -1 > -2 = g(1), \quad f(x) < g(x), \quad x \notin [0, 2].$$

В-2 Сколько корней имеет уравнение

$$[1 - (x-2)^2] = 2x - 3,$$

где через $[t]$ обозначена целая часть числа t (т.е. наибольшее целое число, не превосходящее t)?

Ответ: 4

В-3 Сколько корней имеет уравнение

$$[2 - (x-2)^2] = 2x - 2,$$

где через $[t]$ обозначена целая часть числа t (т.е. наибольшее целое число, не превосходящее t)?

Ответ: 4

В-4 Сколько корней имеет уравнение

$$[3 - (x-2)^2] = 2x - 1,$$

где через $[t]$ обозначена целая часть числа t (т.е. наибольшее целое число, не превосходящее t)?

Ответ: 4

В-5 Сколько корней имеет уравнение

$$[4 - (x-2)^2] = 2x,$$

где через $[t]$ обозначена целая часть числа t (т.е. наибольшее целое число, не превосходящее t)?

Ответ: 4

В-6 Сколько корней имеет уравнение

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике
Отборочный этап 2024/25 учебного года для 9 класса

$$[5 - (x - 2)^2] = 2x + 1,$$

где через $[t]$ обозначена целая часть числа t (т.е. наибольшее целое число, не превосходящее t)?

Ответ: 4

В-7 Сколько корней имеет уравнение

$$[(x + 2)^2] = 2x + 3,$$

где через $[t]$ обозначена целая часть числа t (т.е. наибольшее целое число, не превосходящее t)?

Ответ: 3

В-8 Сколько корней имеет уравнение

$$[(x + 2)^2 - 1] = 2x + 2,$$

где через $[t]$ обозначена целая часть числа t (т.е. наибольшее целое число, не превосходящее t)?

Ответ: 3

В-9 Сколько корней имеет уравнение

$$[(x + 2)^2 - 2] = 2x + 1,$$

где через $[t]$ обозначена целая часть числа t (т.е. наибольшее целое число, не превосходящее t)?

Ответ: 3

В-10 Сколько корней имеет уравнение

$$[(x + 2)^2 - 3] = 2x,$$

где через $[t]$ обозначена целая часть числа t (т.е. наибольшее целое число, не превосходящее t)?

Ответ: 3

В-11 Сколько корней имеет уравнение

$$[(x + 2)^2 - 4] = 2x - 1,$$

где через $[t]$ обозначена целая часть числа t (т.е. наибольшее целое число, не превосходящее t)?

Ответ: 3

В-12 Сколько корней имеет уравнение

$$[(x + 2)^2 + 1] = 2x + 4,$$

где через $[t]$ обозначена целая часть числа t (т.е. наибольшее целое число, не превосходящее t)?

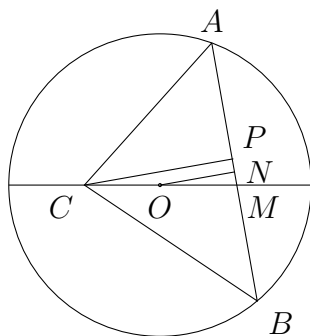
Ответ: 3

Задача 7

В-1 Дана окружность с центром O и радиусом $4\sqrt{3}$. Проведена хорда AB , которая оказалась гипотенузой прямоугольного треугольника ABC . Диаметр окружности, проходящий через вершину C , делится на четыре равных отрезка вершиной C треугольника, центром O окружности и точкой пересечения диаметра с хордой AB . Найдите расстояние от центра окружности до хорды AB .

Ответ: 3

Решение.



Пусть M — точка пересечения диаметра с гипотенузой AB . Отметим, что расположение точек O, C, M на диаметре определяется однозначно — так как O обязана быть посередине.

Опустим из точки O перпендикуляр ON к хорде AB . Тогда N — середина отрезка AB (так как ON — высота равнобедренного треугольника AOB). Проведем $CP \parallel ON$ (где P лежит на AB) и соединим N и C отрезком прямой. Рассмотрим треугольник MCP . Отрезок ON — средняя линия треугольника, тогда $CP = 2 \cdot ON$. Отрезок CN — медиана в прямоугольном треугольнике ABC , следовательно $CN = \frac{1}{2}AB = NB$.

Пусть $ON = x$, $MN = NP = y$, $CN = NB = z$.

Тогда, так как $OM = \frac{1}{2}R$, из треугольников ONB , CNP и OMN на основании теоремы Пифагора получаем:

$$\begin{cases} x^2 = R^2 - z^2, \\ (2x)^2 = z^2 - y^2, \\ x^2 = \left(\frac{1}{2}R\right)^2 - y^2. \end{cases}$$

Складывая почленно первые два уравнения и затем вычитая из результата третье, находим

$$\begin{aligned} (2x)^2 &= R^2 - \left(\frac{1}{2}R\right)^2, \\ 4x^2 &= \frac{3}{4}R^2, \\ x &= \frac{\sqrt{3}}{4}R. \end{aligned}$$

В-2 Дана окружность с центром O и радиусом $8\sqrt{3}$. Проведена хорда AB , которая оказалась гипотенузой прямоугольного треугольника ABC . Диаметр окружности, проходящий через вершину C , делится на четыре равных отрезка вершиной C треугольника, центром O окружности и точкой пересечения диаметра с хордой AB . Найдите расстояние от центра окружности до хорды AB .

Ответ: 6

В-3 Дана окружность с центром O и радиусом $16\sqrt{3}$. Проведена хорда AB , которая оказалась гипотенузой прямоугольного треугольника ABC . Диаметр окружности, проходящий через вершину C , делится на четыре равных отрезка вершиной C треугольника, центром O окружности и точкой пересечения диаметра с хордой AB . Найдите расстояние от центра окружности до хорды AB .

Ответ: 12

В-4 Дана окружность с центром O и радиусом $32\sqrt{3}$. Проведена хорда AB , которая оказалась гипотенузой прямоугольного треугольника ABC . Диаметр окружности, проходящий через вершину C , делится на четыре равных отрезка вершиной C треугольника, центром O окружности и точкой пересечения диаметра с хордой AB . Найдите расстояние от центра окружности до хорды AB .

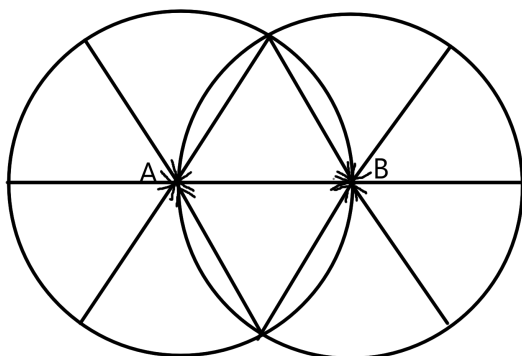
Ответ: 24

Задача 8

В-1 50 детей играют в снежки. Каждый набрал в руку по снаряду. По команде ребята одновременно кидают снежок в ближайшего к нему ребенка (в одного из ближайших, если несколько детей находится на одинаковом расстоянии от него. Найти наименьшее число детей, в которые попал хотя бы один снежок.

Ответ: 10

Решение. (Для варианта 1, 50 человек.) Заметим, что в каждого ребенка может попасть не более 6 снежков. Так как иначе у каждого метателя найдётся другой ребенок, который окажется к нему ближе. Ровно 6 снежков ребенок может получить только в том случае, если в него стреляли дети, находящиеся в вершинах правильного шестиугольника, а подбитый находился в центре этого шестиугольника. Назовем того, кто в центре A . Он сам попал в одного из этих 6 стрелявших. Назовем второго подбитого B . Нетрудно показать, что если в A попало 6 снежков, то в B не более четырех. Поскольку было выпущено 50 снежков, а в каждого мальчика попало не более 6 снежков, то подбито не менее 9-ти детей. Если подбито ровно 9 детей, то не меньше 5-ти из них подбито 6-ю снежками. Но тогда должно быть еще 5 подбитых детей. Что противоречит противоречию, что всего 9 подбитых детей. Следовательно, снежками попали не менее чем в 10 детей. Ситуация, в которой оказывается ровно 10 детей приведена на картинке, где дети разбиваются на 5 групп по 10 человек и в каждой группе оказывается ровно двое детей, в которых попали снежком.



Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Отборочный этап 2024/25 учебного года для 9 класса

В-2 60 детей играют в снежки. Каждый набрал в руку по снаряду. По команде ребята одновременно кидают снежок в ближайшего к нему ребенка (в одного из ближайших, если несколько детей находится на одинаковом расстоянии от него. Найти наименьшее число детей, в которые попал хотя бы один снежок.

Ответ: 12

В-3 70 детей играют в снежки. Каждый набрал в руку по снаряду. По команде ребята одновременно кидают снежок в ближайшего к нему ребенка (в одного из ближайших, если несколько детей находится на одинаковом расстоянии от него. Найти наименьшее число детей, в которые попал хотя бы один снежок.

Ответ: 14

В-4 40 детей играют в снежки. Каждый набрал в руку по снаряду. По команде ребята одновременно кидают снежок в ближайшего к нему ребенка (в одного из ближайших, если несколько детей находится на одинаковом расстоянии от него. Найти наименьшее число детей, в которые попал хотя бы один снежок.

Ответ: 8
