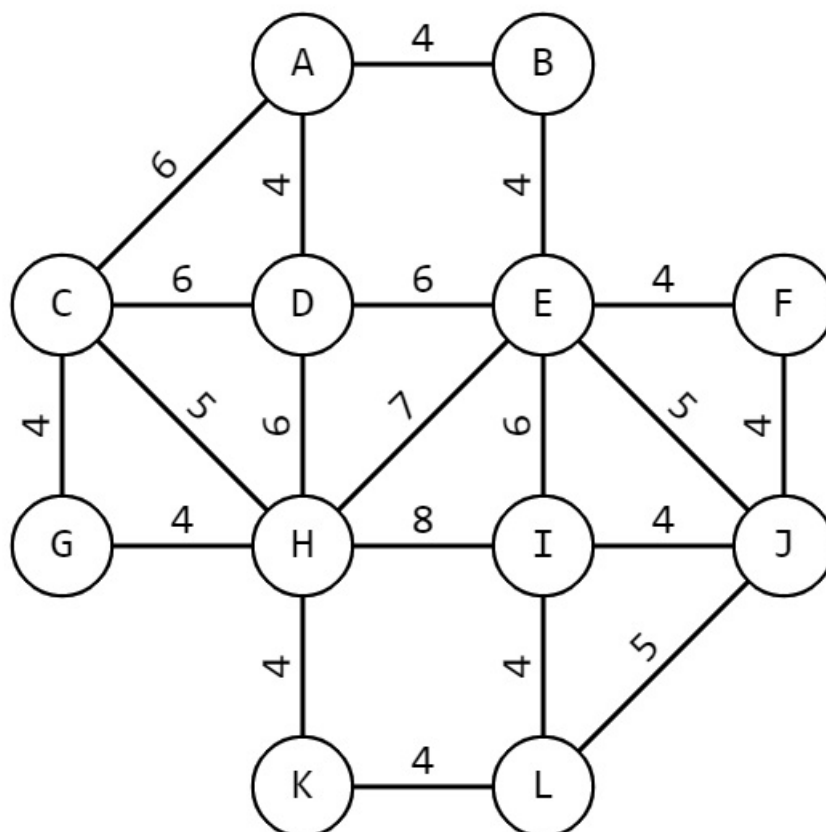


Олимпиада Ломоносов по робототехнике 2023 г.
Отборочный этап.
11 класс

Задача №1 (25 баллов) Почтальон собирается развезти письма. Для этого ему нужно посетить все улицы, на которых живут адресаты (см. схему). Почтальон находится в отделении почты (на схеме обозначено точкой А). После доставки всех писем он хочет сходить пообедать в кафе (точка С). Почтальон хотел бы сделать это за наименьшее время.



Схема

Отрезками на схеме обозначены улицы. Кругами на схеме обозначены перекрестки, где почтальон может поменять направление движения. Цифрами на схеме обозначено время в минутах, которое потребуется почтальону, чтобы проехать по данной улице. Все указанные на схеме улицы почтальон должен посетить хотя бы по одному разу.

Какое наименьшее время в минутах потребуется почтальону на то, чтобы, выйдя из здания почты (А), доставить все письма, после чего прийти до кафе (С)? Для простоты считайте, что на каждой улице почтальон раскладывает письма по ящикам за 5 минут. Для того, чтобы доставить все письма на одной улице, достаточно один раз по ней пройти и один раз разложить на ней письма.

Ответ: 222 мин.

Решение

На схеме представлен ненаправленный граф.

Поскольку почтальон должен посетить все ребра хотя бы по одному разу, то он потратит времени не меньше, чем суммарное время прохода по всем улицам по одному разу:

$$(4+6+4+4+6+6)+(4+4+5+6+7)+(6+5+4+4+8)+(4+4+4+5+4) = 104 \text{ (мин.)}$$

На то, чтобы разложить письма на каждой из 21 улиц, почтальон потратит:

$$21 * 5 = 105 \text{ (мин.)}$$

На доставку писем почтальон потратит не менее:

$$104 + 105 = 209 \text{ (мин.)}$$

Так как из каждой вершины, кроме вершин *A* и *L*, выходит только четное число дорог, то для того, чтобы обойти весь граф, посетив каждое из ребер по разу, можно начать в вершине *A* и при этом закончить в вершине *L*. Значит, после прохода по всем ребрам, почтальон должен будет пройти из вершины *L* в вершину *C* кратчайшим путём.

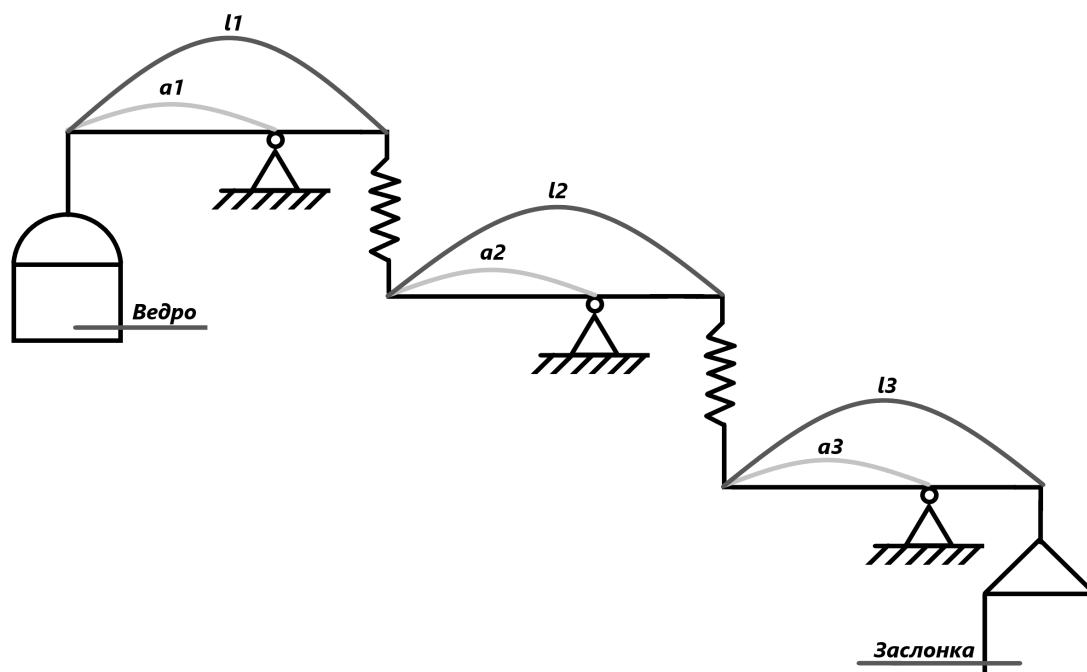
В данном случае минимальный путь – это *L-K-H-C*.

Минимальное время, за которое почтальон доставит все письма, а потом дойдёт до кафе равно:

$$209 + (4+4+5) = 209+13 = 222 \text{ (мин.)}$$

Ответ: 222 мин.

Задача №2 (25 баллов) На робототехническом полигоне установлена труба, сквозь которую должен проехать робот. Выход из трубы перекрыт заслонкой. Для поднятия заслонки собрали механизм, включающий в себя составной рычаг и противовес. Противовес изготовлен из пластикового ведра, дно которого выстлано мягкой тканью. Масса противовеса равна $m = 0,5$ кг. Масса заслонки равна $M = 9$ кг. Составной рычаг собран по следующей схеме (см. схему).



Схема

Составной рычаг собран из трёх балок и двух пружин одинаковой жесткости. Длина балки $l_1 = 1$ м, длина $a_1 = 0,8$ м, длина балки $l_2 = 1,2$ м, длина $a_2 = 0,9$ м,

длина балки $l_3 = 1,2$ м, длина $a_3 = 0,6$ м.

Раздается звуковой сигнал, и в ведро начинают равномерно падать шарики. В начале в ведре нет шариков. Один шарик падает в ведро каждые 6 секунд. Масса одного шарика равна $m_0 = 20$ г. Определите, через сколько секунд после звукового сигнала заслонка начнет подниматься. Ответ дайте в секундах с точностью до целых. При расчетах массой балок и потерями энергии на трение в точках опоры и сжатии пружин можно пренебречь.

Ответ: 78 с

Решение

Чтобы заслонка начала подниматься, достаточно, чтобы заслонка была уравновешена противовесом или чуть-чуть перевешивала.

Запишем уравнение равновесия составного рычага:

$$M * g * (l_3 - a_3) * (l_2 - a_2) * (l_1 - a_1) = (m + N * m_0) * g * (a_1 * a_2 * a_3)$$

$$N * m_0 = M * (l_3 - a_3) * (l_2 - a_2) * (l_1 - a_1) : (a_1 * a_2 * a_3) - m$$

$$N = (M * (l_3 - a_3) * (l_2 - a_2) * (l_1 - a_1) : (a_1 * a_2 * a_3) - m) : m_0$$

$$N = (9 * (1 - 0,8) * (1,2 - 0,9) * (1,2 - 0,6) : (0,8 * 0,9 * 0,6) - 0,5) : 0,02$$

$$N = (9 * (0,2 * 0,3 * 0,6) : (0,8 * 0,9 * 0,6) - 0,5) : 0,02$$

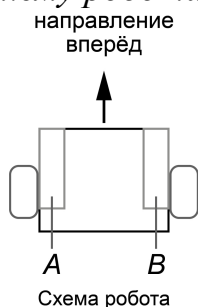
$$N = (9 * 2 * 3 * 6 : (8 * 9 * 6) - 0,5) : 0,02 = 12,5 \text{ (шариков)}$$

То есть, чтобы уравновесить заслонку, нужно 12,5 шариков, а когда упадет 13 шариков, то заслонка начнет подниматься через:

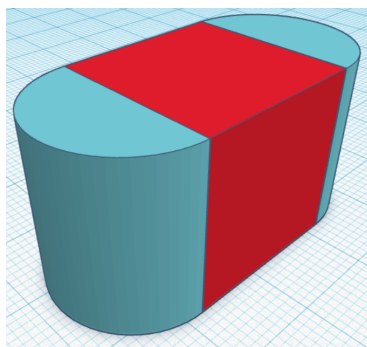
$$13 * 6 = 78 \text{ (с)}$$

Ответ: 78 с.

Задача №3 (20 баллов) Робот оснащён двумя отдельно управляемыми колёсами, расстояние между центрами колёс (ширина колеи) составляет 28 см, радиус колеса робота 9 см, $\pi \approx 3,14$. Левым колесом управляет мотор А, правым колесом управляет мотор В (см. *Схему робота*).



На робототехническом полигоне установлен объект, составленный из куба и двух половин прямого кругового цилиндра. Высота цилиндра равна его диаметру и равна стороне куба (см. *Объект*). Объект имеет гладкую поверхность без ступенек.



Объект

На робота установили датчик расстояния так, что он находится на линии оси колёс и всегда направлен строго перпендикулярно к поверхности объекта. Датчик расположен горизонтально.

Робот движется вокруг объекта, объезжая его по периметру так, что колесо В всегда находится дальше от цилиндра, чем колесо А, и датчик расстояния всегда направлен перпендикулярно поверхности цилиндра. Показания датчика расстояния даны на графике (см. График).



График

Известно, что за 4 полных оборота робота вокруг объекта мотор В повернулся на 18720° . Определите, чему равен радиус цилиндра. Ответ дайте в сантиметрах, приведя результат с точностью до целых. Для получения более точного ответа округление стоит производить только после получения финального результата.

Ответ: 45 см.

Решение

Определим длину кривой, по которой движется колесо В:

$$18720^\circ : 360^\circ = 52 \text{ (оборотов)}$$

За один объезд по периметру колесо В сделает:

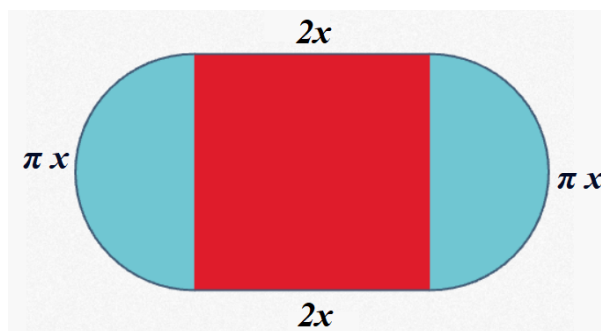
$$52 : 4 = 13 \text{ (оборотов)}$$

Длина кривой, которую проехало колесо В:

$$13 * 2 * \pi * 9 = 234\pi \text{ (см)}$$

Обозначим за x — длину радиуса цилиндра. Тогда диаметр цилиндра будет равен $2x$.

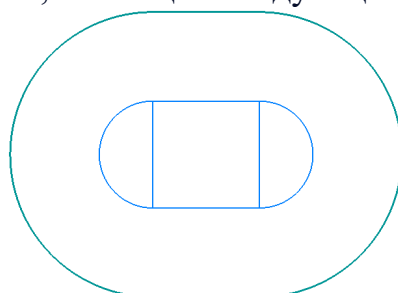
Тогда сторона куба равна $2x$. Рассмотрим, как выглядит сечение объекта горизонтальной плоскостью:



Получается, что длина кривой, ограничивающей сечение объекта равна:

$$2x + 2x + \pi x + \pi x = 4x + 2\pi x$$

Колесо В движется по кривой, имеющей следующий вид:



Длина кривой состоит из частей двух видов — половин окружности и прямых отрезков.

Робот движется по кривой, содержащей такие же части. Длины прямых отрезков равны длинам ребра куба, а радиусы дуг окружностей отличаются от радиуса окружности цилиндра.

Судя по графику, датчик всегда располагался на расстоянии 30 см от поверхности объекта. Но, датчик располагается по середине между колес, соответственно, колеса расположены на расстоянии половины ширины колеи, то есть:

$$28 : 2 = 14 \text{ (см)}$$

Так как колесо В всегда находится от объекта дальше, чем колесо А, то колесо В всегда находится на расстоянии $30 + 14 = 44$ см от поверхности объекта.

Получается, что колесо В движется по кривой, радиус кривизны которой равен $44 + x$.

Значит длина кривой, по которой движется колесо В, будет равна:

$$2x + 2x + \pi(x + 44) + \pi(x + 44) = 4x + 2\pi(x + 44)$$

Приравняем полученную длину траектории, по которой движется колесо В:

$$4x + 2\pi(x + 44) = 234\pi$$

$$4x + 2\pi x + 88\pi = 234\pi$$

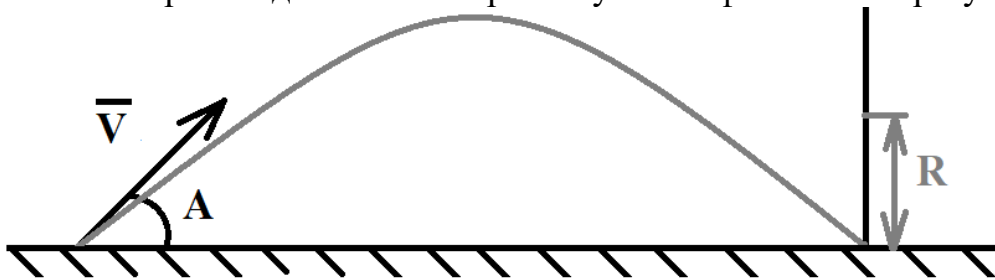
$$x \cdot (4 + 2\pi) = 146\pi$$

$$x = 146\pi : (4 + 2\pi) = 73\pi : (2 + \pi) \approx 73 \cdot 3,14 : (2 + 3,14) = 44,595... \approx 45 \text{ (см)}$$

Ответ: радиус цилиндра равен 45 см.

Задача №4 (15 баллов) Робот стреляет снарядом в мишень. Скорость снаряда направлена под углом $A = 30^\circ$ к горизонту. Снаряд попал в основание мишени через $t = 5$ секунд после выстрела. Центр мишени расположен на высоте $R = 5$ м от края мишени. На сколько градусов надо изменить угол пуска снаряда относительно горизонта, чтобы снаряд попал ровно в центр мишени. Ответ дайте в градусах, округлив результат до целых.

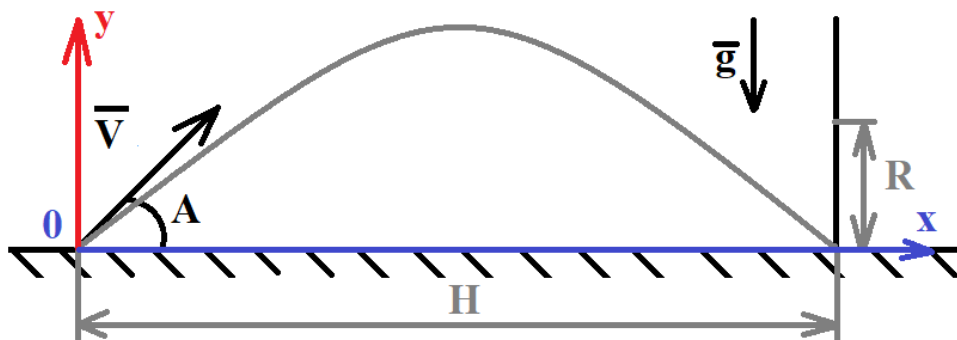
Точка старта снаряда расположена на одной горизонтали с основанием мишени. Считайте, что модуль стартовой скорости снаряда сохраняется. Считайте, что все снаряды одинаковые. Сопротивление воздуха не учитывайте. При расчётах примите $g = 10 \text{ м/с}^2$. Среди возможных вариантов выберите тот, который предполагает меньшее изменение угла. Для получения более точного ответа, округление стоит производить только при получении финального результата.



Ответ: 2°

Решение

Сделаем рисунок:



Запишем уравнение движение первого снаряда в момент падения первого снаряда:

$$0 = 0 + V \sin A t - (gt^2)/2$$

$$V \sin A = gt/2$$

$$V = gt / (2 \sin A)$$

Запишем уравнение движение второго снаряда в момент падения первого снаряда:

$$H = 0 + V \cos A t + 0$$

$$H = V * t * \cos A$$

$$H = gt^2 \cos A / (2 \sin A)$$

Запишем уравнение движение второго снаряда:

$$R = V \sin B t_1 - g(t_1)^2/2$$

$$H = V \cos B t_1$$

Выразим время движения второго снаряда

$$t_1 = H / (V \cos B) = g t^2 \cos A / (2 \sin A) : (gt / (2 \sin A) : \cos B) = t * \cos A / \cos B$$

$$t_1 = t * \cos A / \cos B$$

Выразим угол при втором движении:

$$R = V \sin B t_1 - g(t_1)^2/2$$

$$R = V \sin B t \cos A / \cos B - gt^2 \cos^2 A / (2 \cos^2 B)$$

Так как $1/\cos^2 B = 1 + \operatorname{tg}^2 B$, то

$$R = V t \cos A \operatorname{tg} B - 0,5 gt^2 \cos^2 A (1 + \operatorname{tg}^2 B)$$

$$2R = 2Vt \cos A \operatorname{tg} B - gt^2 \cos^2 A (1 + \operatorname{tg}^2 B)$$

Обозначим $\operatorname{tg} B = x$

$$gt^2 \cos^2 A (x^2) - 2Vt \cos A (x) + gt^2 \cos^2 A + 2R = 0$$

$$gt^2 \cos^2 A (x^2) - g t^2 \operatorname{ctg} A (x) + gt^2 \cos^2 A + 2R = 0$$

Подставим значения тригонометрических функций для угла $A=30^\circ$

$$gt^2 (0,75) (x^2) - g t^2 \sqrt{3} (x) + gt^2 (0,75) + 2R = 0$$

$$3gt^2(x^2) - 4\sqrt{3} g t^2(x) + 3gt^2 + 8R = 0$$

$$D = 48g^2 t^4 - 4(3gt^2 + 2R) 3gt^2 = 4t^2 (12g^2 t^2 - 3g(3gt^2 + 8R))$$

$x =$

$$X = (g t^2 \operatorname{ctg} A \pm \sqrt{g^2 t^2 \operatorname{ctg}^2 A - 4(gt^2 \cos^2 A + 2R) g \cos^2 A}) / (2 gt^2 \cos^2 A) = (g t \operatorname{ctg} A \pm \sqrt{g^2 t^2 \operatorname{ctg}^2 A - 4(gt^2 \cos^2 A + 2R) g \cos^2 A}) / (2 gt \cos^2 A)$$

$$X_1 = (4\sqrt{3} g t^2 - 2t \sqrt{2g^2 t^2 - 3g(3gt^2 + 8R)}) : 6gt^2 =$$

$$= (2\sqrt{3} g t - \sqrt{2g^2 t^2 - 3g(3gt^2 + 8R)}) : 3gt =$$

$$= (2\sqrt{3} * 10 * 5 - \sqrt{2 * 100 * 25 - 3 * 10 * (3 * 10 * 25 + 8 * 5)}) : (3 * 10 * 5) \approx 0,62555028$$

$$X_2 = (2\sqrt{3} g t + \sqrt{2g^2 t^2 - 3g(3gt^2 + 8R)}) : 3gt =$$

$$= (2\sqrt{3} * 10 * 5 + \sqrt{2 * 100 * 25 - 3 * 10 * (3 * 10 * 25 + 8 * 5)}) : (3 * 10 * 5) \approx 1,68385080$$

Определим угол, под которым должен быть расположен вектор скорости к горизонту первоначально:

$$B_1 = \operatorname{arctg}(0,62555028) \approx 32^\circ$$

$$B_2 = \operatorname{arctg}(1,68385080) \approx 59^\circ$$

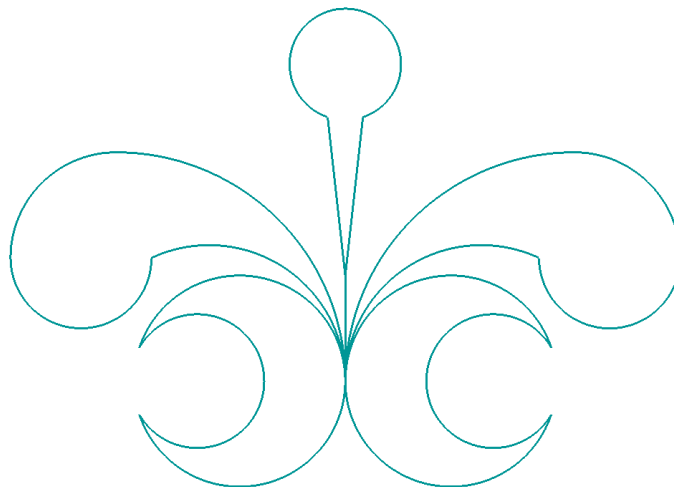
Так как $59^\circ > 32^\circ$, то выберем именно угол 32°

Определим, на сколько нужно подкорректировать угол старта снаряда:

$$32^\circ - 30^\circ = 2^\circ$$

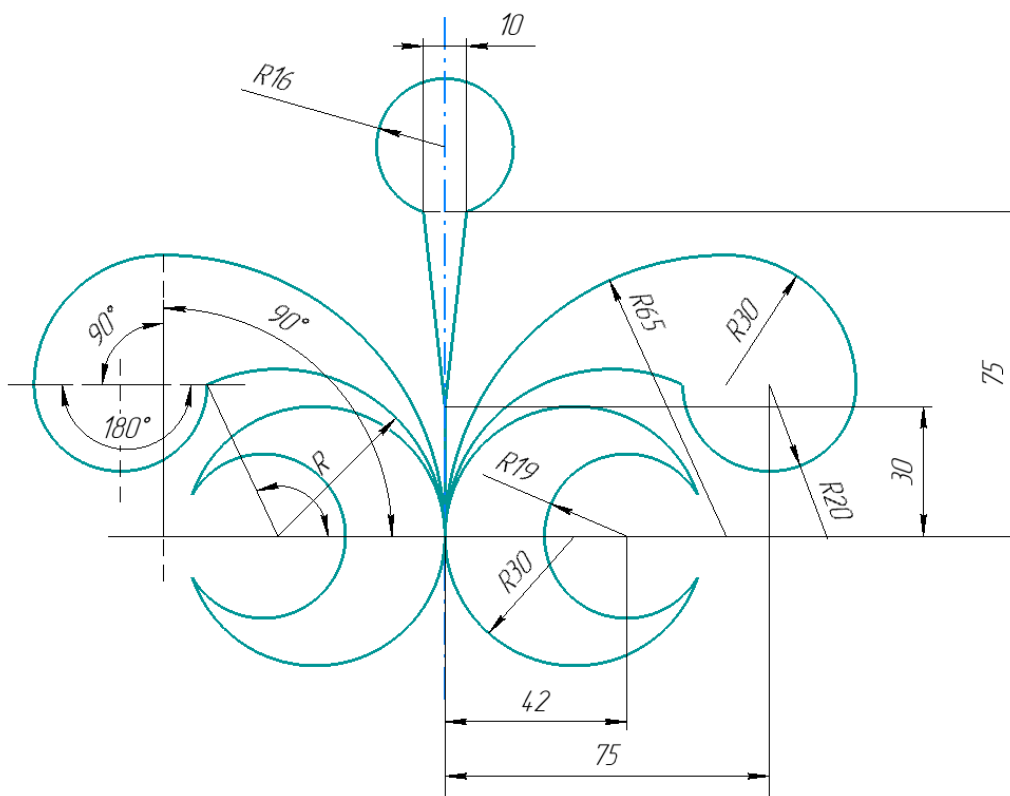
Ответ: 2°

Задача №5 (15 баллов) Робот-чертёжник движется по баннеру и наносит на него изображение (см. *Рисунок*) с помощью кисти, закреплённой по середине между колёс. Изображение обладает вертикальной осью симметрии.



Рисунок

Траектория робота представляет собой замкнутую кривую. Робот не проезжал ни по одной линии траектории дважды. На чертеже размеры даны в сантиметрах (см. чертёж).



Чертёж

Определите длину траектории движения робота. Ответ дайте в дециметрах, приведите с точностью до целых. Для простоты размерами робота можно пренебречь. При расчётах примите $\pi \approx 3,14$. Для получения более точного ответа округление стоит производить только при получении финального результата.

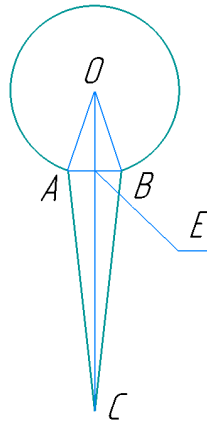
Ответ: 133 дм.

Решение

Предложенную траекторию можно изобразить, изобразив ровно по одному разу каждую из дуг и отрезков.

Траекторию можно разделить на отрезок, центральную часть фигуры и две пары равных фигуры. Определим размера каждой из фигур.

Рассмотрим фигуру. Введем обозначения.



Мы знаем, что $AB = 10$ см, $AE = 10 : 2 = 5$ см, $CE = 75 - 30 = 45$ см, $OA=OB=16$ см.

$$CA=CB = (\text{AE}^2 + \text{CE}^2)^{0,5} = (5^2 + 45^2)^{0,5} = 2050^{0,5}$$

$$\angle AOB = 2 \angle AOE$$

$$\sin \angle AOE = AE : AO = 5/16$$

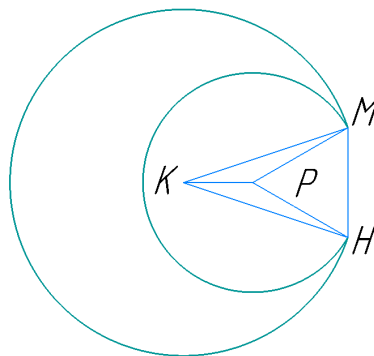
$$\angle AOB = 2 \arcsin (5/16)$$

Периметр данной фигуры:

$$2 AC + 2\pi AO * (360^\circ - \angle AOB) : 360^\circ = 2*2050^{0,5} + 2\pi*16 *(360^\circ - 2\arcsin (5/16)) : 360^\circ = 180,868649... \text{ (см)}$$

Рассмотрим следующую часть фигуры и введем обозначения.

Мы знаем, что $KM = KH = 30$ см, $PM=PH = 19$ см, $KP = 42-30 = 12$ см.



$$\angle MPH = 2\angle KPM$$

$$\cos \angle KPM = (KP^2 + PM^2 - KM^2) / 2 KP PM = (12^2 + 19^2 - 30^2) / (2 * 12 * 19) = - 395/456$$

$$\angle KPM = \arccos ((KP^2 + PM^2 - KM^2) / 2 KP PM) = \arccos (-395/456)$$

$$\angle MKH = 2\angle MKP$$

$$\cos \angle MKP = (KP^2 + KM^2 - PM^2) / 2 KP KM = (12^2 + 30^2 - 19^2) / (2 * 12 * 30) = 683/720$$

$$\angle MKP = \arccos ((KP^2 + KM^2 - PM^2) / 2 KP KM) = \arccos (683/720)$$

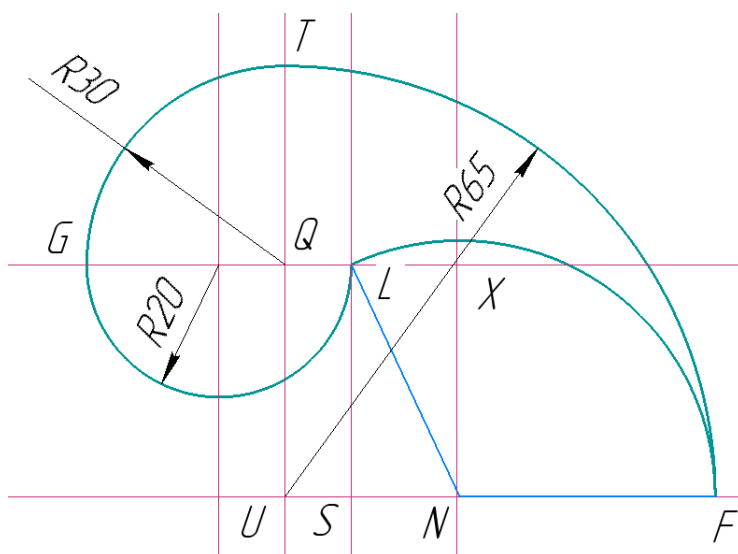
Периметр фигуры равен:

$$2\pi PM * \angle MPH : 360^\circ + 2\pi KM * (360^\circ - 2\angle MKP) : 360^\circ =$$

$$= 38\pi * (2\arccos (-395/456)) : 360^\circ + 60\pi * (360^\circ - 2\arccos (683/720)) : 360^\circ =$$

$$= 99,44873358... + 169,09106868... = 268,53980226... \text{ (см)}$$

Рассмотрим следующую часть фигуры и введем обозначения.



Для того, чтобы определить периметр данной фигуры, нам необходимо определить градусную меру угла LNF.

Через центры дуг окружностей и через крайние точки дуг проведем ряд горизонтальных и вертикальных прямых.

Мы знаем, что дуга $\angle LNF > 90^\circ$.

$$\angle LNF = \angle XNF + \angle LNX = 90^\circ + \angle LNX$$

$XN = QU$ – как отрезки, лежащие на параллельных прямых, отсекаемые параллельными прямыми.

$$QU = UT - QT = 65 - 30 = 35 \text{ см}$$

$$XN = QU = 35 \text{ см}$$

Обозначим радиус $LN = NF = R$

$$\text{Тогда } LX = 75 - 20 - R = 55 - R$$

Так как треугольник LXN – прямоугольный, то

$$LN^2 = LX^2 + XN^2$$

$$R^2 = (55 - R)^2 + 35^2$$

$$3025 - 110R + 1225 = 0$$

$$R = 4250 : 110$$

$$R = 38,63 \text{ см}$$

$$\cos \angle LNX = XN : LN = 35 : 38, (63)$$

$$\angle LNX = \arccos (XN : LN)$$

Тогда периметр фигуры будет равен:

$$2\pi * (65 / 4 + 30 / 4 + 20 / 2 + 38, (63) * (\arccos (35 : 38, (63)) + 90^\circ) / 360^\circ) =$$

$$= 2\pi * (33,75 + 38, (63) * (\arccos (35 : 38, (63)) + 90^\circ) / 360^\circ) = 289,49767059...$$

Таким образом, длина траектории равна:

$$30 + 180,868649... + 2 * 268,53980226... + 2 * 289,49767059 ... = 1326,9... \text{ (см)}$$

$$1326,9... \text{ см} \approx 133 \text{ дм}$$

Ответ: 133 дм.

Ответы и критерии проверки

№	Ответ	Баллы
1	222 мин.	25 баллов за полностью правильный ответ, приведённый в требуемой форме
2	78 с	25 баллов за полностью правильный ответ, приведённый в требуемой форме
3	45 см	20 баллов за полностью правильный ответ, приведённый в требуемой форме
4	29,9°	15 баллов за полностью правильный ответ, приведённый в требуемой форме
5	544 см. Допустимо 545 см	15 баллов за полностью правильный ответ, приведённый в требуемой форме