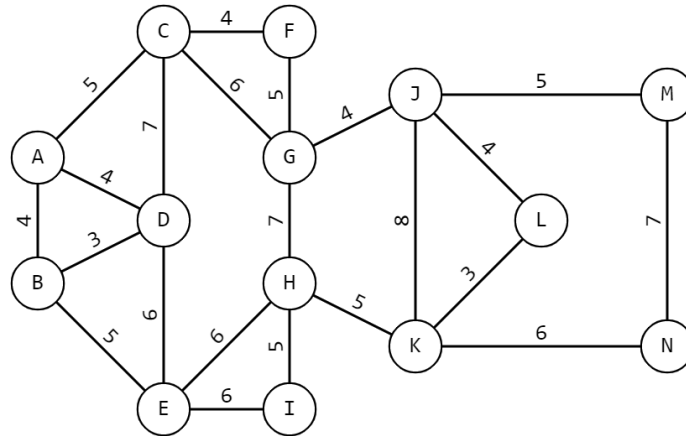


Олимпиада Ломоносов по робототехнике
2023/2024 уч.год
Отборочный этап. 8-10 класс

Задание №1 (20 баллов) Почтальон собирается развезти письма. Для этого ему нужно посетить все улицы, на которых живут адресаты (см. схему). Почтальон находится в отделении почты (на схеме обозначено точкой А). После доставки всех писем он хочет сходить пообедать в кафе (точка М). Почтальон хотел бы сделать это за наименьшее время.



Схема

Отрезками на схеме обозначены улицы. Кругами на схеме обозначены перекрестки, где почтальон может поменять направление движения. Цифрами на схеме обозначено время в минутах, которое потребуется почтальону, чтобы проехать по данной улице. Все указанные на схеме улицы почтальон должен посетить хотя бы по одному разу.

Какое наименьшее время в минутах потребуется почтальону на то, чтобы доставить все письма, после чего дойти до кафе? Для простоты считайте, что на каждой улице почтальон раскладывает письма по ящикам моментально.

Ответ: 139 мин.

Решение

На схеме представлен ненаправленный граф.

Поскольку почтальон должен посетить все ребра хотя бы по одному разу, то он потратит времени не меньше, чем суммарное время проезда по всем улицам по одному разу:

$$(5+4+4)+(3+5)+(4+6+7)+(6)+(6+6)+(5)+(4+7)+(5+5)+ (5+4+8)+(3+6)+(7) = \\ = 13+8+17+18+16+10+17+16 = 21+35+27+32 = 115 \text{ (мин.)}$$

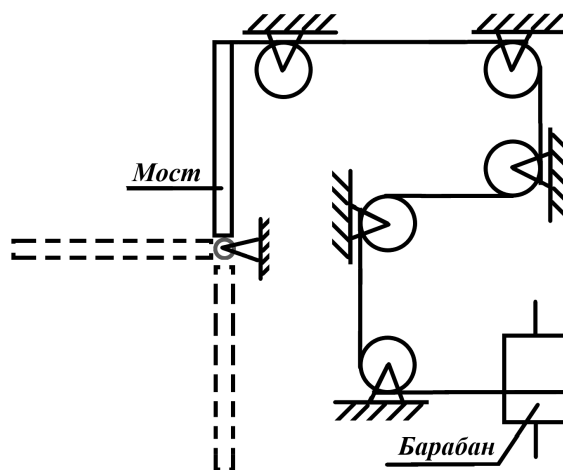
Так как из каждой вершины, кроме вершин А и В, выходит только четное число дорог, то для того, чтобы обойти весь граф, посетив каждое из рёбер по разу, можно начать в вершине А и при этом вернуться в вершину В. Значит, после прохода по всем рёбрам, почтальон должен будет пройти из вершины В в вершину М кратчайшим путём. В данном случае минимальный путь – это В-А-С-Г-Ж-М.

Минимальное время, за которое почтальон доставит все письма, а потом дойдёт до кафе равно: $115+4+5+6+4+5 = 115 + 24 = 139$ (мин.)

Ответ: 139 мин.

Задание №2 (20 баллов) У Васи есть набор из восьми шестерёнок. Используя их все, он собрал самую сильную трёхступенчатую передачу. Набор состоит из две шестерни с 30, две с 20, одна с 50, одна с 60, одна с 75 и одна с 90 зубьями соответственно. Ведущая ось передачи вращается с частотой 6 оборотов в минуту.

Ведомая ось передачи присоединили к двум барабанам диаметром 120 мм каждый. К данным барабанам привязали по тонкой, нерастяжимой и невесомой нити. Длины нитей равны. Через систему неподвижных блоков вторые концы нитей подведены к подъёмному мосту. С другой стороны, мост соединён с полигоном с помощью петель. Мост может вращаться вокруг осей петель на 180° . В закрытом положении мост занимает строго вертикальное положение. В открытом — строго горизонтальное (см. *Схему*). Длина моста равна 1 м. Определите, на сколько секунд нужно включить мотор, чтобы мост поменял положение из вертикального в горизонтальное. Ответ дайте в секундах с точностью до целых. Трением в осях блоков пренебрегите! При расчётах примите $\pi \approx 3,14$.



Схема

Ответ: 1267 с

Решение

$$120 \text{ мм} = 12 \text{ см}$$

Передача с максимальной силой должна содержать переход с шестерёнок с возможно меньшим числом зубьев на шестерёнки с возможно большим числом зубьев. Нужно взять шестеренки со 90, 75, 60 зубьями в качестве ведущих и 20, 20 и 30 зубьями в качестве ведомых. Посчитаем, сколько оборотов делает ведомая ось передачи за минуту:

$$6 * (20 * 20 * 30) : (90 * 75 * 60) = 0,1(7) \text{ (оборотов)}$$

Длина веревки, которую должен вытянуть барабан:

$$100 * (2)^{0,5}$$

Посчитаем время, за которое барабан вытянет веревку данной длины

$$(100 * (2)^{0,5} : (3,14 * 12 * 0,1(7))) * 60 = 1266,71... \approx 1267 \text{ (с)}$$

Ответ: 1267 с

Задание №3 (20 баллов) Робот оснащён двумя отдельно управляемыми колёсами, расстояние между центрами колёс (ширина колеи) составляет 18 см, радиус колеса робота 8 см, $\pi \approx 3,14$. Левым колесом управляет мотор А, правым колесом управляет мотор В (см. *Схему робота*).

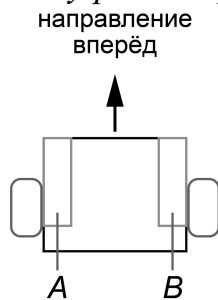
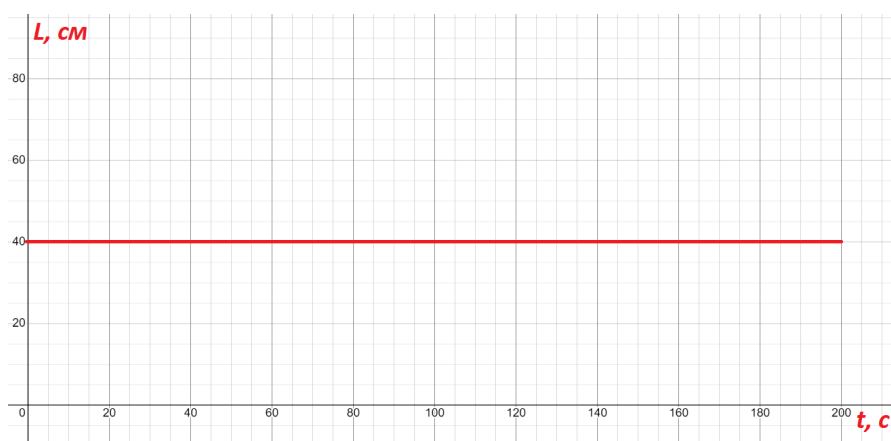


Схема робота

На робототехническом полигоне установлен прямой круговой цилиндр. На робота установили датчик расстояния так, что он находится на линии оси колёс и направлен на цилиндр. Датчик расположен горизонтально.

Робот движется вокруг цилиндра так, что колесо В всегда находится дальше от цилиндра, чем колесо А, и датчик расстояния всегда направлен перпендикулярно поверхности цилиндра. Показания датчика расстояния даны на графике (см. *График*).



График

Известно, что за 5 полных оборот робота вокруг цилиндра мотор В повернулся на 14400° . Определите, чему равен радиус цилиндра. Ответ дайте в сантиметрах, приведя результат с точностью до целых. Для получения более точного ответа округление стоит производить только после получения финального результата.

Ответ: 15 см.

Решение

Колеса А и В, а также точка, расположенная по середине между колес, движутся по концентрическим окружностям.

Определим, сколько оборотов сделала ось колеса В:

$$14400^\circ : 360^\circ = 40 \text{ (оборота)}$$

Определим число оборотов мотора, которое совершило колесо В за один объезд

роботом вокруг цилиндра:

$$40 : 5 = 8 \text{ (оборотов)}$$

Определим расстояние, которое проехало колесо за полученное число оборотов:

$$8 * 2 * \pi * 8 = 401,92 \text{ (см)}$$

Определим радиус окружности, по которой двигалось колесо В:

$$401,92 : (2 * 3,14) = 64 \text{ (см)}$$

Так как датчик расположен по середине между центрами колёс, то он расположен на расстоянии от колеса В:

$$18 : 2 = 9 \text{ (см)}$$

Так как датчик В всегда находится снаружи окружности, по которой движется датчик расстояния, то датчик движется по окружности радиуса:

$$64 - 9 = 55 \text{ (см)}$$

Судя по графику, датчик находится всегда на расстоянии 40 см от поверхности цилиндра. Значит, радиус цилиндра равен:

$$55 - 40 = 15 \text{ (см)}$$

Ответ: радиус цилиндра равен 15 см.

Задание №4 (20 баллов) Первую четверть пути робот двигался с постоянной скоростью 2 см/с, следующие 30 секунд — с постоянной скоростью 4 см/с, а последнюю треть времени — со скоростью 6 см/с. Определите среднюю скорость робота на первой половине пути. Ответ дайте в сантиметрах в секунду, приведя результат с точностью до десятых. Для получения более точного результата, округление стоит производить только при получении финального ответа.

Ответ: 2,7 см/с

Решение

Обозначим за s — величину всего пути, выраженную в сантиметрах.

За t — время в секундах, за которое робот преодолеет весь путь.

Сделаем чертеж, чтобы представить данные, приведенные в задаче, более

	1 участок	2 участок	3 участок
Скорость	2 см/с	4 см/с	6 см/с
Расстояние	$\frac{s}{4}$	120 см	$\frac{6t}{3} = 2t$
Время	$\frac{s}{8}$	30 с	$\frac{t}{3}$

наглядно:

Составим два уравнения для расстояния и времени:

$$s/4 + 120 + 2t = s$$

$$s/8 + 30 + t/3 = t$$

Решив два данных уравнения в системе, получим:

$$s = 560 \text{ (см)}, t = 150 \text{ (с)}$$

Тогда длина половины пути будет равна:

$$560 : 2 = 280 \text{ (см)}$$

Определим, за какое время робот проедет первые 280 см:

$$560 : 4 = 140 \text{ (см)} \text{ — длина четверти пути и первого участка}$$

Так как $120 < 140$, то половина пути включает в себя как первый и второй участок, так и часть третьего участка.

Определим время, за которое робот проедет вторую половину пути:

$$280 : 6 = 46 \frac{2}{3} \text{ (с)}$$

Тогда время, за которое робот проедет первую половину пути будет равно:

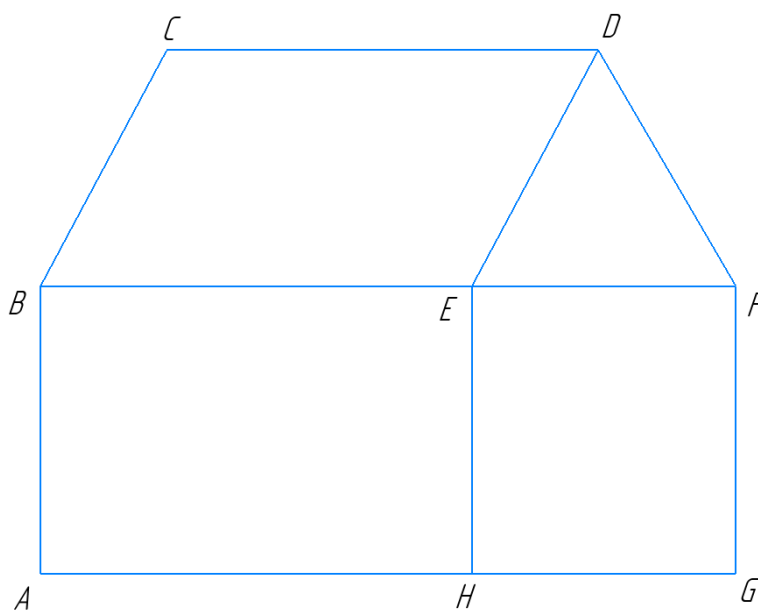
$$150 - 46 \frac{2}{3} = 103 \frac{1}{3} \text{ (с)}$$

Значит, средняя скорость робота на первой половине пути равна:

$$280 : 103 \frac{1}{3} = 2,709... \approx 2,7 \text{ (см/с)}$$

Ответ: 2,7 см/с.

Задание №5 (20 баллов) На робототехническом полигоне на баннере нанесена следующая разметка (см. рисунок). Узлы (вершины) фигуры обозначены латинскими заглавными буквами.



Рисунок

Известно, что $ABFG$, $ABEH$ – прямоугольники, $BCDF$ – равнобедренная трапеция с основаниями CD и BF . Радиус окружности, вписанной в четырёхугольник $HEFG$, равен 20 см, $AB = BC$, $AH = CD$. Длина отрезка AG равна 2 м.

По заданию, робот должен посетить все вершины ровно по одному разу. Робот может двигаться только по линиям. Все повороты робот должен совершать в вершинах, пользуясь только танковым разворотом. Робот должен стартовать в вершине A и финишировать в вершине F . Определите минимальную длину траектории робота, при условии, что робот будет строго следовать заданию. Ответ дайте в сантиметрах, приведя результат с точностью до целых. Для

простоты размерами работа пренебречь.

Ответ: 400 см.

Решение

Так как АВЕН и АВFG – прямоугольники, то можно показать, что НЕFG – прямоугольник. Так как в прямоугольнике НЕFG можно вписать окружность, то НЕFG – ромб, и, значит НЕFG – квадрат.

Тогда длина стороны квадрата будет равна удвоенной длине радиуса окружности, вписанной в него, то есть

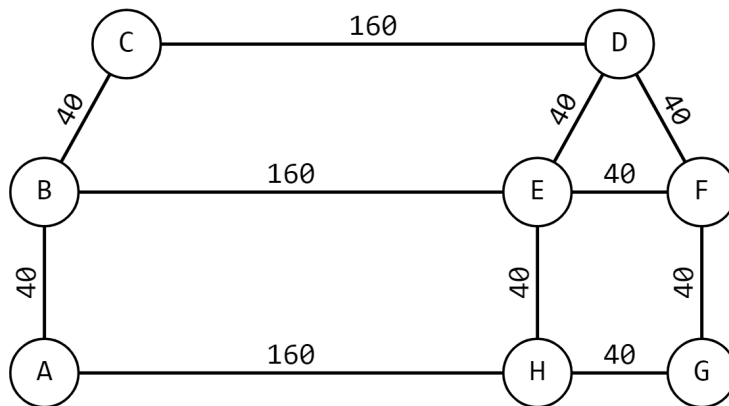
$$HE=EF=FG=HG=AB=BC=DF=2*20=40 \text{ см}$$

Так как АВЕН – прямоугольник, а ВСDE – трапеция, то можно показать, что отрезки ВЕ и CD лежат на параллельных прямых, а также то, что АН=ВЕ=CD. Значит, ВСDE – параллелограмм. Получается, что ВС=DE=40 см.

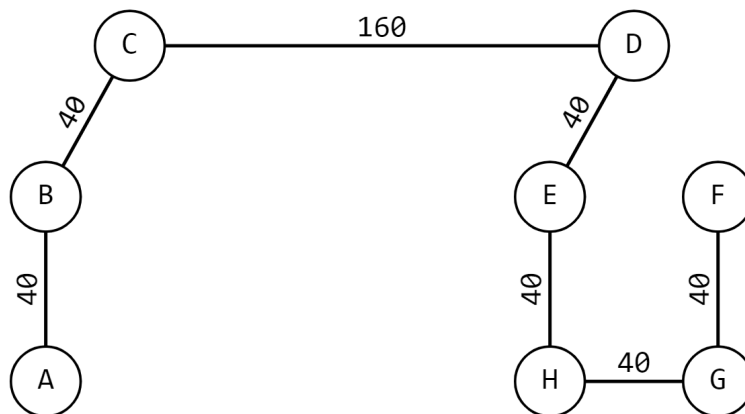
Определим длину отрезков АН=ВЕ=CD:

$$AH=BE=CD=AG-HG=200 - 40 = 160 \text{ (см)}$$

Изобразим фигуру в виде графа. Минимизируем его, удалив лишние ребра, оставив только те, которые позволят пройти по всем вершинам ровно по одному разу. При этом постараемся добиться, чтобы длинных проездов было минимально необходимое число — один.



Граф до минимизации



Граф после минимизации

Таким образом, минимальная длина траектории будет равна:

$$160 + 6*40 = 160+240=400 \text{ (см)}$$

Ответ: 400 см.

Ответы и критерии проверки

№	Ответ	Баллы
1	139 мин.	20 баллов за полностью правильный ответ, приведённый в требуемой форме
2	21 с	20 баллов за полностью правильный ответ, приведённый в требуемой форме
3	15 см	20 баллов за полностью правильный ответ, приведённый в требуемой форме
4	2,7 см/с	20 баллов за полностью правильный ответ, приведённый в требуемой форме
5	400 см	20 баллов за полностью правильный ответ, приведённый в требуемой форме